

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 8. Enero-Junio 2023

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Campos Ciclotómicos: Un breve análisis estructural elemental.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.
- **Descripción del algoritmo $J1$ para solucionar ecuaciones cuadráticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.**
Jaime William Flores Tecalco.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Modelado matemático para estabilidad de sistemas discretos no autónomos con retardo infinito mediante control Lyapunov-Razumikhin.**
Marcos Fajardo Rendón.
- **Propuestas en modelos matemáticos originales en inteligencia artificial y probabilidad para educación, economía, seguridad ciudadana, cáncer, sismos y tránsito.**
Fernando Gustavo Isa Massa.
- **Modelando la dinámica del tipo de cambio USD/MXN mediante la aplicación de procesos estocásticos.**
Pichardo Jimenez Raziel.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Areli Guadalupe Mateos Sánchez.

COMITÉ CIENTÍFICO

<i>Caballero Mora Karen Salomé.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas
<i>Guzmán Sánchez Sergio.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Hernández Escobar Marleny.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Isa Massa Fernando Gustavo.</i>	Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Tucumán. Argentina.
<i>Juárez Contreras Socorro.</i>	Instituto Politécnico Nacional. Dirección General.
<i>Mendoza Pérez Armando Felipe.</i>	Universidad Autónoma de Chiapas. Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas.
<i>Salazar Peña Enrique.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.
<i>Sentiés Nacaspac María de Jesús.</i>	Escuela Normal Superior de México. Academia de Matemáticas.

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster

Marcos Fajardo Rendón

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 8, Enero-Junio 2023 es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2022-021112015700-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 9 de Enero de 2023.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 8.

Enero-Junio de 2023

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 8, enero-junio de 2023, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
-------------------------	----------

OBJETOS MATEMÁTICOS

Campos Ciclotómicos: Un breve análisis estructural elemental.	10
<i>Cyclotomic Fields: A Brief Elementary Structural Analysis.</i>	
<i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	

Descripción del algoritmo $J1$ para solucionar ecuaciones cuadráticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.	
<i>Description of the $J1$ algorithm to solve quadratic equations with roots $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.</i>	
<i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	13

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

Modelado matemático para estabilidad de sistemas discretos no autónomos con retardo infinito mediante control Lyapunov-Razumikhin.	20
<i>Mathematical modeling for stability of non-autonomous discrete systems with infinite delay using Lyapunov-Razumikhin control.</i>	
<i>Marcos Fajardo Rendón.</i>	

Propuestas en modelos matemáticos originales en inteligencia artificial y probabilidad para educación, economía, seguridad ciudadana, cáncer, sismos y tránsito.	25
<i>Proposals with original mathematical models in artificial intelligence and probability for education, economy, citizen security, cancer, earthquakes and traffic.</i>	
<i>Fernando Gustavo Isa Massa.</i>	

Modelando la dinámica del tipo de cambio USD/MXN mediante la aplicación de procesos estocásticos.	33
<i>Modeling the dynamics of the USD/MXN exchange rate by stochastic processes.</i>	
<i>Pichardo Jimenez Raziell.</i>	

CARTA DEL EDITOR

Como ya es costumbre, para esta edición del JOOM, comentamos brevemente sólo tres obras escritas por destacados investigadores en el área de la matemática y publicadas en años cuya secuencia calendárica es congruente con este año de 2023.

En el año de 1933, el gran matemático soviético Andréi Nikoláyevich Kolmogórov publica, en lengua alemana, su aportación fundamental: “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung” o “Los Conceptos básicos de la Teoría de la Probabilidad” que apareció en la revista de Aportes de las Matemáticas. Posteriormente G. M. Bavli realiza la traducción a la lengua rusa en 1936. El extracto de la presente reseña se basa en la edición de 1950 en lengua inglesa de la editorial Chelsea de Nueva York. En el prefacio el autor expone que el propósito principal de su monografía es proponer un fundamento axiomático a la Teoría de la Probabilidad y como consecuencia moderniza los conceptos básicos de esta teoría, ya que dichos conceptos, hasta ese año, eran considerados bastante peculiares. La realización de una aportación como esta pudo haber sido bastante desesperada hasta antes de la publicación de las teorías de Lebesgue sobre la medida y la integración. Sin embargo, después de ello las analogías entre la medida de un conjunto y la probabilidad de un evento, así como entre la integral de una función y la esperanza matemática de una variable aleatoria, se clarificaron bastante. Estas analogías dieron lugar a extensiones adicionales como por ejemplo, varias propiedades de las variables aleatorias independientes estaban en total concordancia con las propiedades correspondientes de las funciones ortogonales. Aunque sin bien, la Teoría de la Probabilidad no se basa en los ejemplos citados anteriormente, era sumamente necesario hacer independientes a las teorías de la medida y de la integración de los elementos geométricos que estaban en primer plano en la propuesta de Lebesgue, tarea que llevó a cabo Fréchet. La concepción de la Teoría de la Probabilidad basada en los puntos de vista generales mencionados anteriormente era de actualidad en aquella época para algunos matemáticos, pero aún faltaba una exposición completa de todo el sistema que quedase libre de complicaciones extrañas. Kolmogórov tuvo el cuidado de atender aquellos puntos que no se incluyen en lo expuesto anteriormente al redactar su propuesta y que forman una gama de ideas que son familiares para el especialista y que son: la distribución de probabilidad en espacios de dimensión infinita (tratado en el Capítulo 3); la diferenciación y la integración de la esperanza matemática con respecto a un parámetro (Capítulo 4); y especialmente, la teoría de probabilidad condicional y esperanza condicional (Capítulo 5). El autor enfatiza que el surgimiento de estos nuevos problemas se relaciona con problemas concretos de la física, y hace referencia a la publicación en ese año de 1933 de M. Leontovich en el Journal de Física de la URSS del trabajo de investigación titulado “Zur Statistik der Kontinuierlichen Systeme und des zeitlichen Verlaufes der physikalischen Vorgänge” o “Sobre la estadística de los sistemas continuos y el curso de los procesos físicos a lo largo del tiempo”. El capítulo 6 incluye un estudio, aunque sin demostración, de algunos resultados de la investigación de A. Khinchine y del autor de las limitaciones de la aplicabilidad de la Ley de los Grandes Números. La bibliografía incluida menciona los trabajos más recientes en esa época. El autor firma en la localidad de Kljasma, cerca de Moscú, el domingo de Pascua de 1933. Haciendo los cálculos apropiados (*consultar JOOM No. 7, julio – diciembre*

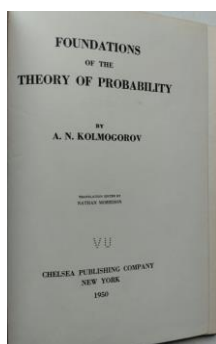
2022) la luna llena fue el domingo 9 de abril aproximadamente a las 18:02 horas y debido a que 1933 tuvo el mismo calendario que este 2023, el domingo 16 de abril se celebró la Pascua y firmó el prefacio de su propuesta. La obra se divide como sigue: Capítulo 1: Teoría elemental de la Probabilidad; Capítulo 2: Campos Infinitos de Probabilidad; Capítulo 3: Variables Aleatorias; Capítulo 4: Esperanza Matemática; Capítulo 5: Probabilidad Condicional y Espectativa Matemática; Capítulo 6: Independencia; La Ley de los Grandes Números.

Los Axiomas propuestos por el autor se definen de la siguiente manera. Cita la obra de Hausdorff, “Mengenlehre” o “Teoría de Conjuntos” de 1927, página 78. “Un sistema de conjuntos se llama campo si la suma, el producto y la diferencia de dos conjuntos del sistema también pertenece al mismo sistema. Todo campo no vacío contiene al conjunto nulo 0 . Utilizando la notación propuesta por Hausdorff, se designa al producto de A y B por AB ; su suma por $A + B$ en el caso donde $AB = 0$; y en el caso general de $A + B$; la diferencia de A y B por $A - B$. El conjunto $E - A$ que es el complemento de A , se denotará por A . Se infiere que el lector está familiarizado con las reglas fundamentales de las operaciones entre conjuntos y sus sumas, productos y diferencias. Todos los subconjuntos de $\mathcal{F}$ se designan por letras latinas mayúsculas”.

Sea E una colección de elementos $\xi, \upsilon, \zeta, \dots$, representan sucesos elementales, y $\mathcal{F}$ un conjunto de subconjuntos de E ; los elementos del conjunto $\mathcal{F}$ son los sucesos aleatorios.

- 1.- $\mathcal{F}$ es un campo de conjuntos.
- 2.- $\mathcal{F}$ contiene al conjunto E .
- 3.- A cada conjunto A de $\mathcal{F}$ se le asigna un número real no negativo $P(A)$, que se denomina la probabilidad del evento A .
- 4.- $P(E) = 1$.
- 5.- SI A y B no tienen elementos en común, entonces $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Un sistema de conjuntos $\mathcal{F}$, junto con una asignación definitiva de números $P(A)$ satisfacen los axiomas 1 – 5 y estos axiomas son consistentes.



La imagen anterior pertenece a ©Chelsa Publishing, inc. Todos los derechos reservados.

En 1967, la editorial soviética “La Ciencia” publica en Moscú el texto titulado “Integral, Medida y Derivadas” de la autoría de G. E. Shilov y B. L. Gurevich, una Teoría General. Este libro presenta de forma moderna la Teoría General de la Integral para funciones numéricas y además toda la gama de problemas relacionados con la integral, la medida y la derivada y se basa en la Integral de Daniell. Uno de los conceptos principales en el análisis matemático es precisamente el de Integral. La definición clásica de este objeto matemático fue completada por Cauchy y Riemann en el siglo 19, y ha sido muy útil en la solución de muchos problemas en los campos de la física, la mecánica y la matemática misma. Con este concepto es posible escribir, por ejemplo, una secuencia de funciones: $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$, con la condición: $a \leq x \leq b$, de tal modo que satisface, en promedio, la condición de convergencia de Cauchy y posteriormente de T. E. Velyuina: $\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)| dx$, y que tiende a cero cuando: $n \rightarrow \infty \wedge m \rightarrow \infty$, por lo que no existe función límite entre las integrales de Riemann. Así, la clase de funciones integrables de Riemann es por tanto, incompleta. Es posible que, bajo estas circunstancias, se haya originado la famosa afirmación de Wiener (1933): “En un curso ideal de Teoría de la Integral de Lebesgue, todos los teoremas serían establecidos como consecuencia de la Integral de Daniell (N. Wiener y R. Paley: “La Transformada de Fourier en el dominio Complejo”. (existe traducción al ruso, por editorial “La Ciencia”, 1964: página 214). Entre las fuentes originales del tema, debemos mencionar las siguientes obras: “Lecciones de Análisis Funcional”, 1954 de Frigyes Riesz y Béla Sekefalevy - Nagy; En esta obra se demuestra que el método de Daniell se cumple para el caso de una o más variables reales. L. Loomis, “Introducción al Análisis Armónico Abstracto”, de 1956. En esta obra se estudia el Método de Daniell de forma general, aunque con una pequeña variante. La primera edición rusa se publicó en 1964 por editorial “La Ciencia” y posteriormente una publicación en inglés en 1966, a cargo de la editorial Prentice-Hall. El texto que nos ocupa está dividido en cuatro partes: 1) La Integral, con 3 capítulos; 2) La Integral de Stilltjes, con 2 capítulos; 3) La Medida, con 3 capítulos; 4) La Derivada, con 2 capítulos.



La imagen anterior pertenece a © Издательство Наука. Todos los derechos reservados.

En 1978 un aventajado ex estudiante de Emil Artin, el Profesor Serge Lang, entonces miembro de del Colegio de profesores e investigadores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Yale con sede en la ciudad de New Haven Connecticut, publica su obra

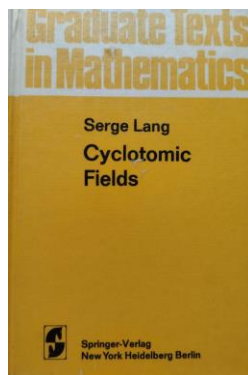
titulada “Campos Ciclotómicos”, con el propósito de ofrecer una actualización a la introducción de este clásico e interesante objeto matemático apoyando en la investigación y docencia a los teóricos numéricos, lo geómetras algebraicos, los topólogos y los algebristas que trabajan con la Teoría K. El trabajo de Kummer sobre campos ciclotómicos facilitó el camino para el desarrollo de la teoría algebraica de números en general, consecuencia del producto de investigadores como Dedekind, Weber, Hensel, Hilbert, Takagi, Artin y otros muchos. Sin embargo, el progreso de esta teoría general mostró en cierto momento una tendencia al rezago debido al surgimiento de algunas propuestas especiales hechas por parte de Kummer y que no coincidían del todo con la teoría general y que por un largo periodo del siglo pasado dichas propuestas se olvidaron o se retomaron muy poco, con excepción de algunas investigaciones de las que resaltan las de Pollaczek (Sobre los cuerpos circulares irregulares de l -enésimo orden y de l^2 – enésimas raíces unitarias, en alemán, publicado en la revista alemana Momento Matemático No. 21 en 1924: páginas 1-38); E. Artin y H. Hasse (Los dos teoremas complementarios a la ley de reciprocidad de la n -enésima potencia en el campo de las i -enésimas raíces de la unidad, en alemán, publicado en el Sexto Seminario del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Hamburgo en 1928: páginas 146-162) y H. S. Vandiver, H. S. (El último Teorema de Fermat y el segundo factor en el número de clase ciclotómica, en inglés, publicado en el Boletín de la Sociedad Americana de Matemáticas No, 40 en 1934: páginas 118-126.). A mediados de la década de los 50 la teoría de los campos ciclotómicos se retomó nuevamente con las aportaciones de Iwasawa y Leopoldt. El primero de ellos observó que este objeto matemático presentaba analogías con los campos numéricos de extensiones de campo constante en la geometría algebraica, así que escribió muchos reportes de investigación relacionados con torres de campos ciclotómicos, y más generalmente con las extensiones de Galois de campos numéricos cuyo grupo de Galois es isomórfico al grupo aditivo de enteros p -ádicos. Por su parte, Leopoldt se concentró en un campo ciclotómico fijo, y estableció varias analogías p -ádicas de fórmulas numéricas de clase analítica clásica compleja. Particularmente, esto le llevó a introducir, junto con Kubota, las analogías p -ádicas de L -funciones complejas adjuntas a extensiones ciclotómicas de los racionales. Finalmente, durante los últimos años de la década de los 60 Iwasawa hizo un descubrimiento fundamental que logró una conexión muy cercana entre su trabajo sobre torres de campos ciclotómicos y también de las L -funciones p -ádicas de Leopoldt-Kubota. La aportación de Iwasawa se titula Sobre las L -funciones p -ádicas, en inglés, publicado en los Anales de Matemáticas 89 en 1969: páginas 198-205. Los resultados clásicos de Kummer, Stickelberger y de Iwasawa-Leopoldt, se han complementado con los resultados de investigación de los siguientes autores y como consecuencia, han recibido nueva significancia en muchas ramas de la matemática.

- 1) Las analogías para extensiones de campos imaginarios cuadráticos en el contexto de la multiplicación compleja, con la participación de Novikov, Robert y Coates-Wiles. Especialmente este último ha obtenido mayores resultados en la dirección de la conjetura de Birch-Swinnerton-Dyer, obteniendo nuevo conocimiento relacionado con las leyes de reciprocidad explícita, así como un refinamiento a la teoría de Kummer-Takagi sobre unidades para todos los niveles.

- 2) Los desarrollos realizados por Coates, Coates-Sinnott y Lichtenbaum sobre una teoría análoga en el contexto de la Teoría K .
- 3) El desarrollo realizado por Kubert-Lang sobre una teoría análoga para las unidades y la clase de grupo de divisor cúspide de la función de campo modular.
- 4) La introducción de las formas modulares por Ribet al probar el recíproco del Teorema de Herbrand.
- 5) La conexión entre los valores de las funciones zeta en enteros negativos y los términos constantes de formas modulares que inician con los resultados obtenidos por Klingen y Siegel, y los amplios desarrollos a las propiedades de congruencia de estos términos constantes, realizado por Serre, por ejemplo, estableciendo la existencia de L -funciones p -ádicas para campos reales totalmente arbitrarios.
- 6) La construcción de las funciones zeta p -ádicas en varios contextos de curvas elípticas y formas modulares como aportación de Katz, Manin, Mazur y Vishik.
- 7) La conexión con anillos de endomorfismo de variedades abelianas o curvas, implicando la multiplicación compleja, por Shimura-Taniyama, y/o la curva de Fermat, por Davenport-Hasse-Weil, y más recientemente por Gross-Rohlich.

En esa época no existía una introducción sistemática a la Teoría Básica Ciclotómica, por lo que el texto intentó cubrirlo. Aunque hay ausencia de una conexión con las formas modulares, el texto pretende ser puramente ciclotómico, con un distintivo totalmente elemental, aunque se aborde en algunos capítulos la Teoría de Campos clásica. Entonces, permanecía abierta la conjetura de Vandiver que proponía que h^+ es prima a p .

La conjetura Iwasawa-Leopoldt relativa a que la p -primaria parte de C^- es cíclica sobre el grupo de anillo, y por tanto isomórfica al módulo de grupo de anillo del ideal de Stickelberger. Para un primer nivel, Leopoldt e Iwasawa han mostrado que esto es una consecuencia de la conjetura de Vandiver y se trata a detalle en el Capítulo 6, parte 4. Mucho de la teoría ciclotómica se extiende a la totalidad del campo de los números reales, en forma de teoremas o conjeturas y aunque no se analiza este aspecto, los trabajos de J. Coates (L -funciones p -ádicas y la Teoría de Iwasawa, publicada en la Conferencia Durham sobre Teoría de Números algebraica y Teoría de Campo de Clases, 1976) y de T. Shintani (Sobre la evaluación de las funciones Zeta de la totalidad de Campos numéricos algebraicos reales de enteros no positivos, publicación en inglés en el Journal de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Tokio, IA Vol. 23, No. 2, 1976: páginas 393-417). Para la época, no parecía haber duda acerca de que el progreso de la teoría de campos ciclotómica estaría vinculado fuertemente con los conceptos del álgebra geométrica, especialmente en lo relativo a las Curvas de Fermat y Modulares. El texto está conformado por 9 capítulos: 1) Sumas de caracteres; 2) Los ideales de Stickelberger y las Distribuciones Bernoulli; 3) Fórmulas analíticas complejas de números de clase; 4) L -funciones p -ádicas; 5) Teoría de Iwasawa y los grupos de clases ideales; 6) Teoría de Kummer sobre Z_p -Extensiones Ciclotómicas; 7) Teoría de Iwasawa sobre Unidades locales; 8) La teoría Lubin-Tate; 9) Las leyes de reciprocidad explícita.



La imagen anterior pertenece a ©Springer-Verlag, inc. Todos los derechos reservados.

En éste número se presentan las siguientes propuestas que abordan desde la rigurosidad matemática distintos problemas.

En la sección objetos se realiza un análisis estructural de los campos ciclotómicos, así como un algoritmo nobel para la solución de ecuaciones cuadráticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Por otro lado para la sección objetivos se realiza una axiomatizada demostración matemática del modelo de control Lyapunov-Razumikhin aplicada para obtener la solución a estabilidad de sistemas de ecuaciones discretas no autónomas que tengan un retraso infinito en tiempo continuo con aplicaciones hacia la cibernética de máquinas. Se presenta un modelo matemático de centros de gravedad de tres dimensiones sinusoidal mediante I.A. que utiliza un algoritmo evolutivo basado en error relativo y probabilidad con aplicación a brindar soluciones a problemas de planes de estudio, recesión-economía crediticia, seguridad ciudadana, cáncer, sismos y tránsito. Por último se realiza el modelado dinámico que presenta el tipo de cambio USD/MXN aplicando procesos estocásticos para la toma de decisiones en los mercados; simulando predicciones para el año 2023 mediante una comparación con los datos reales por método Monte Carlo desde un enfoque de movimiento Browniano Geométrico (GBM) para lograr una aproximación del comportamiento del precio del peso mexicano.

Lamentamos profundamente que la Editorial Española Prensa Científica haya dejado de editar la versión española de la revista *American Scientific* denominada *Investigación y Ciencia*, cuyo primer fascículo apareció el mes de octubre de 1976 y la última entrega fue el pasado mes de enero de este 2023, con un total de 556 ejemplares cuyo contenido científico ha sido de gran calidad, con temas de actualidad y escritos por investigadores de primer nivel. Las traducciones realizadas por el equipo editorial fueron siempre muy acertadas. La sección de Juegos Matemáticos se mantuvo en cada uno de los 556 ejemplares publicados. Agradecemos la labor de todo el equipo editorial.

Felicitamos cordialmente a la Sociedad Matemática Mexicana por su octogésimo aniversario. Fue fundada el miércoles 30 de junio de 1943. Ha contribuido enormemente al conocimiento matemático al ofrecer publicaciones de alta calidad durante todos estos años.

La revista *JOOM* se complace en invitar a su primer evento anual para el año 2024 con motivo de la celebración de los 50 años de la publicación de Gerhard Ringel sobre la propuesta de solución al problema del coloreado de mapas, además de la congruencia de la secuencia de días del calendario a partir del 1ero de Marzo entre 1974 y 2024; se llevará a cabo el **Congreso Internacional de Objetos y Objetivos Matemáticos (CIOOM 2024)** junto con el ***Simposium Internacional sobre Reflexiones y Avances en el Problema de los Cuatro Colores y la Teoría de Grafos 2024*** en la ciudad de México los días 14 y 15 de Marzo del 2024 dentro de las instalaciones de la biblioteca Vasconcelos. Los tópicos de trabajo los pueden revisar de acuerdo con la convocatoria que podrá encontrar en el sitio www.cioom.org. Ambas opciones de publicación son libres de costo para los autores y la asistencia al evento es gratuita para el público en general pudiendo obtener constancia con la valor curricular.



Los editores.

Campos Ciclotómicos: Un breve análisis estructural elemental.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- Esta aportación tiene el propósito de brindar una breve reseña de las ideas básicas en el estudio de los campos ciclotómicos y los polinomios ciclotómicos. La estructura de las ideas matemáticas consta de 3 nociones básicas, 9 definiciones, 6 escolios y 6 consecuencias, un teorema y su demostración..

Palabras Clave- Campos ciclotómicos; polinomios ciclotómicos; números p -ádicos.

Zusammenfassung- Ziel dieses Beitrags ist es, einen kurzen Überblick über die Grundideen bei der Untersuchung zyklotomischer Felder und zyklotomischer Polynome zu geben. Die Struktur mathematischer Ideen besteht aus 3 Grundbegriffen, 9 Definitionen, 6 Scholia und 6 Konsequenzen, einem Theorem und seiner Demonstration.

Schlüsselwörter- Zyklotome Felder; zyklotomische Polynome; p -adische Zahlen.

Резюме - Этот вклад имеет целью дать краткий обзор основных идей в изучении круговых полей и круговых полиномов. Структура математических идей состоит из 3 основных понятий, 9 определений, 6 схолий и 6 следствий, теоремы и ее доказательства.

Ключевые слова - циклотомические поля; циклотомические полиномы; p -адические числа.

Mathematical Subject Classification: 11R60

I. DEFINICIONES

Noción 1.- Sea ξ_n n -ésima raíz primitiva de la unidad, con la condición: $n \in \mathbb{N}$. [1], [2].

Noción 2.- $\mathbb{Q}$ representa el Campo de los Números Racionales. [1], [2].

Def. 1.- $K_n = \mathbb{Q}(\xi_n)$ representa un Campo obtenido a partir de $\mathbb{Q}$ al asociarlo con ξ_n , (elementos del conjunto descrito). [1], [2].

Noción 3.- Sea p un número primo fijo. [3].

Def. 2.- $n = p^{v_p(n)} n'$ representa a cada número entero diferente de cero, con la condición de que se sustenta en el Teorema Fundamental de la aritmética [3]; donde n' es un número entero distinto de cero, $v_p n$ es un entero no negativo único.

Consecuencia 1.- $v_p: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función denominada valoración p -ádica.

Consecuencia 2.- $a, b \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$. Esta expresión define la valoración p -ádica de: $x = \frac{a}{b}$.

Escolio 1.- Debido a que la valoración p -ádica no depende de x (Consecuencia 2), es posible definir un nuevo valor absoluto sobre el Campo de números racionales.

Def. 3.- $|x_p| = p^{-v_p(x)}$ representa el valor p -ádico absoluto de $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, con $p \neq 0$, de acuerdo con la misma idea anotada en la consecuencia 1.

Escolio 2.- Se puede observar que el valor absoluto p -ádico es no arquimediano, y por tanto existe una métrica $\rho(x, y) = |x - y|_p$ denominada ultra métrica [3].

Def. 4.- Todo valor absoluto no común sobre $\mathbb{Q}$ puede ser de dos tipos: a) equivalente al valor absoluto real; b) equivalente a uno de los valores p -ádicos absolutos. (Esta afirmación es conocida como el Teorema de Ostrovski, pero para el propósito de este análisis, lo he adaptado como una definición).

Consecuencia 3.- Los números p -ádicos son el complemento del conjunto $\mathbb{Q}$. Sea ρ un valor métrico extremo inferido por el valor absoluto p -ádico sobre el conjunto $\mathbb{Q}$; entonces el par ordenado $(\mathbb{Q}, \rho)$ es un espacio métrico extremo, y no está completo, debido a que existen secuencias de Cauchy que no convergen en ningún elemento del conjunto $\mathbb{Q}$.

Escolio 3.- Una secuencia de Cauchy se puede describir como (a_k) en $\mathbb{Q}$ con relación a un valor absoluto p -ádico si cumple la siguiente condición: $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1} - a_k|_p = 0$. Como a_k es una secuencia de Cauchy, es evidente que $a_{k+1} - a_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Con ello podemos suponer que a_k es la secuencia que satisface la expresión del límite citado. Sea $m > k$. Entonces existen elementos: $n \in \mathbb{Z}^+ | h = k + n \therefore |a_m - a_k| \leq \max(|a_{k+n} - a_{k+n-1}|_p, |a_{k+n} - a_{k+n-2}|_p, \dots, |a_{k+1} - a_k|_p)$.

Si se cumple que $a_{k+1} - a_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces $a_m - a_k \rightarrow 0$ cuando $m, k \rightarrow \infty$. De ahí que a_j sea una secuencia de Cauchy.

Def. 5.- Si $\mathbb{Q}_p$ representa el campo de números p -ádicos racionales, entonces se pueden denominar a los campos ciclotómicos locales representados por $\mathbb{Q}_p(\xi_n)$.

Escolio 4.- Al enunciar los campos $K_n = K_{2n} | n$ de la forma $2n + 1$, normalmente debe asumirse que $n \neq$

$2(mod\ 4)$. Este concepto matemático surge de la idea de la división de una circunferencia en n partes iguales [2], [4] y que es equivalente al trazo de una raíz primitiva ξ_n en el plano complejo. La estructura de este objeto matemático es muy sencilla, lo que posibilita la formulación de conceptos generales en la teoría de números. Una consecuencia del estudio y análisis de los campos ciclotómicos son los conceptos de un número entero algebraico y de divisor. Una característica especial de estos objetos matemáticos relacionados con los campos numéricos algebraicos se enuncia en la proposición de Kroneker – Weber, que establece lo siguiente: una extensión finita $K/\mathbb{Q}$ es abeliana si cumple la condición $K \subset K_n$ para algún elemento n .

Escolio 5.- En el estudio de la Teoría de Números están incluidas las propiedades aritméticas de las raíces de la unidad [5], [6].

Def. 6.- Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos. Se tiene: $(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$, para todos los enteros n por (Teorema de De Moivre).

Consecuencia 4.- La ecuación algebraica: $z^n - 1 = 0$, tiene por raíces:

- a) $\varepsilon_m = \cos \frac{2\pi m}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi m}{n}, (m = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.
- b) $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \varepsilon_m^2, \dots, \varepsilon_m^{n-1}$.

Escolio 6.- La posición en el plano complejo para (a) es variable. En el círculo unitario con centro en el origen, estos números forman los vértices de un polígono inscrito regular de n lados de tal forma que un vértice se extiende sobre el eje real positivo [6]. Así, el producto de dos enésimas raíces de la unidad es también una enésima raíz de la unidad. Cuando ε_m distingue a uno de los números en (a) con la propiedad de que todos los números sean diferentes, se concluye que ε_m es una enésima raíz primitiva de la unidad, por ello (b) representa todas las raíces enésimas de la unidad.

Def. 7.- Para un polinomio de grado $\alpha(n)$, se tienen los siguientes argumentos:

- a) $F_n(x) = \prod_a (x - \varepsilon_a)$, que describe el producto extendido sobre todas las enésimas raíces de la unidad y define un polinomio ciclotómico de grado n . La sucesión $p_1, p_2, \dots, p_r$ denota los distintos factores primos de n , además, se tiene: $\prod_0 = (x^n - 1)$, con la condición $1 \leq v \leq r$.
- b) $\prod_v = \prod (x^{\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_v}}} - 1)$, representa el producto extendido sobre todos los elementos v de índices i_k que satisfacen: $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_v \leq r$.
- c) Sea la siguiente identidad:

$$F_n(x) = \frac{\prod_0 \prod_2}{\prod_1 \prod_3}$$

Donde todos los productos con índice v par se escriben en el numerador y los correspondientes impares en el denominador.

Def. 8.- El Polinomio:

$$\begin{aligned} \phi_n &= \prod_{\omega \in \mathbb{C}, \text{ la enésima raíz primitiva de la unidad}} (x - \omega) \\ &= \prod_{1 \leq k < n, \text{ M.C.D.}(k,n)=1} (x - e^{\frac{2\pi i k}{n}}) \in \mathbb{C}(x) \end{aligned}$$

Representa al enésimo polinomio ciclotómico [7].

Def. 9.- Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Se tienen las siguientes condiciones:

- a) $\phi_n = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1$; si n es número primo.
- b) $\phi_{2n} = \phi_n(-x)$; si n es número impar igual o mayor que 3.
- c) $\phi_{kn} = \phi_n(x^k)$; si k es un número tal que no divide a n .
- d) $\phi_{kn} = \phi_n(x^k)$; si todo divisor primo de k divide a n .

Consecuencia 6.- ϕ_n tiene coeficientes en el conjunto $\mathbb{Z}$.

II. TEOREMA.

Teorema 1.- Para algún número entero positivo n , existe la factorización:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$$

Prueba. Por nociones (1), (2), Def. (6) (8), $\omega \in \mathbb{C}$ y es la enésima raíz de la unidad, por consecuencia (4) y escolio (6). El ordinal $(\omega) = d$, para algún divisor d de n , por Def. (9, inciso d). Significa que ω es la enésima raíz divisora primitiva de la unidad, y consecuentemente $\phi_d(\omega) = 0$. Por el contrario, si $\omega \in \mathbb{C}$ es una enésima raíz divisora primitiva de la unidad, para algún divisor d de n , también por Def. (9, inciso d), entonces $\omega^d = 1$, por lo que también $\omega^n = 1$. Muestra que ambos polinomios en el teorema 1 tienen las mismas raíces en el campo complejo $\mathbb{C}$. Además, analíticamente, $(x^n - 1)' = nx^{n-1}$ es coprimo con $x^n - 1$, lo que significa que esta última expresión es cuadrable, así ϕ_d es cuadrable para todo d , y tanto ϕ_d como ϕ_e no tienen raíces en común a menos que los

subíndices sean iguales entre sí. Esto justifica que también el polinomio del lado derecho en el Teorema 1 es cuadrable, por lo que ambos polinomios son mónicos e iguales entre sí.

III. CONCLUSIONES

El estudio de los campos ciclotómicos ha recobrado mucha importancia durante los últimos 50 años. Dos aplicaciones interesantes son:

- 1) Aportaciones a la solución del último teorema de Fermat, como son las valoraciones p -ádicas y los polinomios ciclotómicos.
- 2) En el ámbito del álgebra moderna computacional, el desarrollo de códigos BCH ha tenido un apoyo fundamental en el estudio de estos polinomios. El desarrollo de la estructura de las dinámicas aleatoria y determinística también se ha enriquecido con el estudio de los números p -ádicos.

REFERENCIAS

- [1] Виноградов, И.М. (Главный Редактор). Математическая Энциклопедия. Издательство "Советская Энциклопедия". Том 4. (1984). Москва.
- [2] Hazeinkel, M. (Managing Editor). Encyclopedia of Mathematics. An updated and anotated translation of the "Soviet Mathematical Encyclopedia". Vol. 2. Kluwer Academic Press. (1988). Dordrecht, Netherlands.
- [3] Khrennikov A. Y.; Nilsson M. P-adic Deterministic and Random Dynamics. Kluwer Academic Press. (2004). Dordrecht, Netherlands.
- [4] Schwartzman, S. The Words of Mathematics. An Etymological Dictionary of Mathematical Terms Used in English. The Mathematical Association of America. (1994). Washington, D. C.
- [5] Nagell, T. Theory of Numbers. Chelsea Publishing Company. (1964). N.Y.
- [6] Fine, B.; Rosenberger, G. The fundamental theorem of Algebra. Springer Verlag. (1997). N. Y.
- [7] Gathen, J.; Gerhard, J. Modern Computer Algebra. Cambridge University Press. (2003). Caambridge. U. K.

Descripción del algoritmo J1 para solucionar ecuaciones cuadráticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Jaime William Flores Tecalco

Estudiante de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, Escuela Normal Superior de México (ENSM), Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

Estudiante de la Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc, Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 CDMX, México.

Resumen- En este artículo se describe la obtención de un nuevo algoritmo, denominado Algoritmo J1, el cual soluciona ecuaciones cuadráticas con raíces $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con una menor cantidad de pasos en su ejecución al realizar una comparación con otros algoritmos.

Palabras clave- Algoritmo, raíces, continuidad, derivadas, intervalos, función, polinomio, sustitución, reales, complejos.

Abstract- This article describes how to obtain a new algorithm, called Algorithm J1, which solves quadratic equations with roots $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ with fewer steps in its execution when making a comparison with other algorithms.

Keywords- Algorithm, roots, continuity, derivatives, intervals, function, polynomial, substitution, real, complex. **Mathematical Subject Classification:** 11Axx

I. INTRODUCCIÓN

La historia que justifica el origen de las resoluciones de ecuaciones de segundo grado es muy interesante y llena de personajes que han contribuido en la búsqueda de la explicación del mundo [10]. Las ecuaciones de segundo grado fueron resueltas aritméticamente por los egipcios y geométricamente por Euclides y algebraicamente por los hindús [10].

Las ecuaciones cuadráticas fueron analizadas algebraicamente en la India [7]. Aryabhata manejó un enfoque, parecido a la suma de una serie geométrica, en la que muestra la solución a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ pero sin consolidar alguna regla o como se llegó a esa solución en sí [8][11]. Un siglo después, Bhaskara II (c. 1150) comenzó a trabajar con ecuaciones cuadráticas y obtener raíces múltiples, cabe señalar, que ambas eran positivas [3].

El Algoritmo J1 es un método alternativo para resolver ecuaciones cuadráticas enfocado en sustituciones simples con el fin de ahorrarnos pasos y complejidad al realizar las operaciones para dicho fin.

II. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO J1

Definición 1.- Una función f se le llama polinomio si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, \dots, a_n$ son constantes que se conocen como coeficientes del polinomio. El dominio de cualquier polinomio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ [13].

Sea el polinomio [13]

$$g(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 \quad (1)$$

donde

$$(c_0, c_1, \dots, c_n) \quad (2)$$

son constantes [13].

Teorema 1.- Cualquier polinomio es continuo sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Demostración: Si un polinomio de la forma $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ donde $c_0, c_1, \dots, c_n$ son constantes. Se sabe que $\lim_{x \rightarrow a} c_0 = c_0$ y $\lim_{x \rightarrow a} x^m = a^m$; $m = 1, 1, \dots, n$ que es la proposición de la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Dado que f es una suma de funciones de la forma ca^m y una función constante, se deduce que f es continua ■ [13].

Por el Teorema 1 el polinomio $g(x)$ (1) es continuo. Y si $g(x)$ (1) toma la forma particular de una ecuación cuadrática:

$$x^2 + bx + c = 0 \quad (3)$$

Con coeficientes reales

$$b, c \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Entonces se puede definir

$$f(x) = x^2 + bx + c = 0 \quad (5)$$

Definición 2.- Una función f es derivable en un punto a si f es continua y si existen las derivadas laterales y estas sean iguales

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad [52].$$

Definición 3.- Una función f es derivable en un intervalo (a, b) cuando lo es en todos los puntos de este [13].

Si se tiene un intervalo cerrado

$$[x_1, x_2] \quad (6)$$

Entonces podemos establecer por el Teorema 1 que f es una función continua en $[x_1, x_2]$ ya que f es un polinomio [13].

Además, por la Definición 2 y la Definición 3, f una función polinómica continua (5), es derivable en (x_1, x_2) [13].

Definición 4.- El conjunto D de todos los valores posibles de entrada se denomina dominio de la función. El conjunto de todos los valores de $f(x)$ cuando x varía por todos los valores de D se denomina imagen o rango de la función $f: x \rightarrow y$.

Se observa que se obtiene por las imágenes de x_1, x_2

$$f(x_1) = f(x_2) \quad (7)$$

Teorema 3.- Si un polinomio real $f(x)$ toma valores $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos para $x = a$ y $x = b$, entonces hay por lo menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo (a, b) .

Demostración: Sea $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces $f(x)$ se puede transformar en un polinomio real $\varphi(x)$ con $\varphi(0) = f(a)$ y $\varphi(1) = f(b)$ números de signos opuestos. Cuando $\varphi(t) = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1, lo que implica la ecuación original $f(x) = 0$ que tiene una raíz entre a y b . Entre los valores $f(a), f(a+1), \dots, f(b)$ de los cuales $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ existe un $f(c_0)$ que es un último término no positivo tal que $f(c_0) \leq 0$ y $f(c_0+1) > 0$. Si $f(c_0) = 0$ la ecuación tiene una raíz entera c_0 entre a y b . De lo contrario, se divide el intervalo (c_0, c_0+1) en diez partes iguales considerándose los números $f(c_0), f(c_0 + \frac{1}{10}), f(c_0 + \frac{2}{10}), \dots, f(c_0+1)$ de los cuales $f(c_0) < 0$ y $f(c_0+1) > 0$. Entre ellos existe un último no positivo $f(c_0 + \frac{c_1}{10}), 0 \leq c_1 \leq 9$ tal que $f(c_0 + \frac{c_1}{10}) \leq 0$ y $f(c_0 + \frac{c_1+1}{10}) > 0$. Si $f(c_0 + \frac{c_1}{10}) = 0$ la ecuación $f(x)$ tiene una raíz racional $(c_0 + \frac{c_1}{10})$ entre a y b . En caso contrario, se divide el intervalo entero $(c_0 + \frac{c_1}{10}, c_0 + \frac{c_1+1}{10})$ en diez partes iguales considerándose los números $f(c_0 + \frac{c_1}{10}), f(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10^2}), \dots, f(c_0 + \frac{c_1+1}{10})$. Entre ellos existe un número último no positivo $f(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}), 0 \leq c_2 \leq 9$. Si $f(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}) = 0$ se tiene una raíz racional $(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2})$ entre a y b . En caso contrario, se divide el intervalo $(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}, c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2+1}{10^2})$ en diez partes iguales y se continúa con la iteración. El proceso termina cuando la ecuación tiene una raíz racional $c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_m}{10^m}$ representada por una fracción finita entre a y b , de lo contrario puede continuarse indefinidamente, determinándose un decimal de infinitas cifras $\xi = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$. Al definir $\xi_m = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_m}{10^m}$ y $\eta_m = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_{m+1}}{10^{m+1}}$ tenemos $f(\xi_m) < 0$ y $f(\eta_m) > 0$ para $m = 1, 2, 3, \dots$. Por la estructura de la fórmula de Taylor [4] tenemos $f(\xi_m) = f(\xi) + (\xi_m - \xi)f'(\xi) + (\xi_m -$

$\xi)^2 \frac{f''(\xi)}{1 \cdot 2} + (\xi_m - \xi)^3 \frac{f'''(\xi)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots < 0$ y $f(\eta_m) = f(\xi) + (\eta_m - \xi)f'(\xi) + (\eta_m - \xi)^2 \frac{f''(\xi)}{1 \cdot 2} + (\eta_m - \xi)^3 \frac{f'''(\xi)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots > 0$ lo que implica $f(\xi) < (\xi - \xi_m)f'(\xi) - (\xi - \xi_m)^2 \frac{f''(\xi)}{1 \cdot 2} + \dots$ y $f(\xi) > (\xi - \eta_m)f'(\xi) - (\xi - \eta_m)^2 \frac{f''(\xi)}{1 \cdot 2} + \dots$. Este polinomio evaluado en $h; h \neq 0$ se expresa entonces $hf'(\xi) - h^2 \frac{f''(\xi)}{1 \cdot 2} + \dots$ y sería numéricamente menor que un $\varepsilon > 0$. Un δ puede ser calculado al conocerse el valor de ε si solo si $|h| < \delta$. Al considerar las diferencias $(\xi - \xi_m)$ y $(\xi - \eta_m)$ son numéricamente menores que 10^m y tomando m tan grande como para establecer $\frac{1}{10^m} < \delta$, el segundo miembro de las desigualdades $f(\xi) < (\xi - \xi_m)f'(\xi) - (\xi - \xi_m)^2 \frac{f''(\xi)}{1 \cdot 2} + \dots$ y $f(\xi) > (\xi - \eta_m)f'(\xi) - (\xi - \eta_m)^2 \frac{f''(\xi)}{1 \cdot 2} + \dots$ será numéricamente menor que ε . Entonces por más pequeño que se tome ε tenemos $f(\xi) < \varepsilon$ y $f(\xi) > -\varepsilon$ lo que implica $f(\xi) = 0$. Así queda demostrado que el número $\xi = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots$ perteneciente al intervalo (a, b) es una raíz de la ecuación $f(\xi) = 0$ ■ [14].

Corolario 1.- Una ecuación real $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n+1} = 0$ de grado impar, tiene por lo menos una raíz impar. Cuando $a_{2n+1} = 0$ entonces $x = 0$ es una raíz impar y cuando $a_{2n+1} \neq 0$ será positiva o negativa. Si se asume $a_0 > 0$ entonces para valores suficientemente grandes c , $f(c)$ será positiva y $f(-c)$ será negativa. Suponiendo $a_{2n+1} < 0$ entonces $f(0) < 0$ y $f(c) > 0$ con una raíz positiva en la ecuación $f(x) = 0$ [14].

Corolario 2.- Una ecuación $f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{2n} = 0$ de grado par, en la que a_0 y a_{2n} tienen signos opuestos, posee por lo menos dos raíces reales, una positiva y otra negativa. Sea $a_0 > 0$ y c suficientemente grande, $f(c)$ y $f(-c)$ serán ambas positivas. Entonces desde que $f(-c) > 0, f(0) < 0$ y $f(c) > 0$ cada uno de los intervalos $(-c, 0)$ y $(0, c)$ contienen por lo menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ [14].

Corolario 3.- Un polinomio real sin raíces reales en un intervalo $a \leq x \leq b$ conserva un signo constante en él mismo. Sean x' y x'' dos valores cualesquiera tomados en el intervalo (a, b) entonces ni $f(x')$ ni $f(x'')$ son nulos desde que el intervalo no contiene raíces de $f(x)$ y por tanto $f(x')$ y $f(x'')$ no pueden tener signos opuestos, pues de otra manera, $f(x)$ tendría raíz entre x' y x'' perteneciendo al intervalo (a, b) lo que sería una contradicción [14].

Corolario 4.- El número de raíces de $f(x)$ en el intervalo (a, b) contadas de acuerdo con su multiplicidad, es impar o par, de acuerdo con que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos o iguales. Sean $c, d, \dots, l$, distintas raíces de $f(x)$ entre (a, b) con orden de multiplicidad $\gamma, \delta, \dots, \lambda$, entonces $f(x) = (x-c)^\gamma(x-d)^\delta \dots (x-l)^\lambda \varphi(x)$ donde $\varphi(x)$ no tiene raíces entre (a, b) . Sustituyendo $x = b$ y $x = a$, haciendo su cociente obtenemos $\frac{f(b)}{f(a)} = \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^\gamma \left(\frac{b-d}{a-d}\right)^\delta \dots \left(\frac{b-l}{a-l}\right)^\lambda \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}$. Por el Corolario 3 $\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} > 0$ mientras que $\left(\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^\gamma \left(\frac{b-d}{a-d}\right)^\delta \dots \left(\frac{b-l}{a-l}\right)^\lambda\right) < 0$. El signo de $\frac{f(b)}{f(a)}$ es el mismo

que el de $(-1)^{\gamma+\delta+\dots+\lambda}$. El número de raíces de $f(x)$ en el intervalo (a, b) , $\gamma, \delta, \dots, \lambda$, es impar si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos y par si $f(a)$ y $f(b)$ tienen el mismo signo [14].

Proposición 1.- Cuando x crece y pasa por una raíz real de $f(x)$, el cociente $\frac{f'(x)}{f(x)}$ al convertirse en infinito, cambia de signo de $-$ a $+$ o bien, pasa de $-\infty$ a $+\infty$ [14].

Demostración: Sea el polinomio $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ con raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ con un factorio $f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Si se sustituye $x = x + h$, evaluado quedaría como $f(x + h) = a_0(x + h - x_1)(x + h - x_2) \dots (x + h - x_n) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \left(1 + \frac{h}{x - x_1}\right) \left(1 + \frac{h}{x - x_2}\right) \dots \left(1 + \frac{h}{x - x_n}\right)$ o bien $f(x + h) = f(x) \left(1 + \frac{h}{x - x_1}\right) \left(1 + \frac{h}{x - x_2}\right) \dots \left(1 + \frac{h}{x - x_n}\right)$ donde $\left(1 + \frac{h}{x - x_1}\right) \left(1 + \frac{h}{x - x_2}\right) \dots \left(1 + \frac{h}{x - x_n}\right)$ se puede escribir en potencias crecientes como $1 + h \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}\right)$. Entonces $f(x + h) = f(x) + h \left[\frac{f'(x)}{x - x_1} + \frac{f'(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{f'(x)}{x - x_n}\right] + \dots$. Con las potencias anteriores, se puede desarrollar un polinomio de Taylor [5] de la forma $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \dots$ obteniendo $f'(x) = \frac{f'(x)}{x - x_1} + \frac{f'(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{f'(x)}{x - x_n}$ que implica $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n}$. Sean $a, b, \dots, l$, distintas raíces de multiplicidad $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, podemos representar la identidad anterior como $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x - a} + \frac{\beta}{x - b} + \dots + \frac{\lambda}{x - l}$. Si $f(x) = (x - a)^\alpha g(x)$ entonces $g(x)$ tiene raíces distintas $b, c, \dots, l$, de multiplicidad $\beta, \gamma, \dots, \lambda$, lo que supone que se le puede aplicar la misma identidad a $g(x)$ obteniendo $\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\beta}{x - b} + \dots + \frac{\lambda}{x - l}$ y así $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x - a} + \frac{g'(x)}{g(x)}$. Si $f(x)$ tiene coeficientes reales y una raíz real, entonces $g(x)$ es un polinomio real y $g(a) \neq 0$. Sea $x = a - \varepsilon$ y $x = a + \varepsilon$ tenemos $\frac{f'(a - \varepsilon)}{f(a - \varepsilon)} = -\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{g'(a - \varepsilon)}{g(a - \varepsilon)}$ y $\frac{f'(a + \varepsilon)}{f(a + \varepsilon)} = \frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{g'(a + \varepsilon)}{g(a + \varepsilon)}$. Si $\varepsilon > 0$ y además ε es pequeño implica que $-\frac{\alpha}{\varepsilon}$ y $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, en valor absoluto, sobrepasan a $\frac{g'(a - \varepsilon)}{g(a - \varepsilon)}$ y $\frac{g'(a + \varepsilon)}{g(a + \varepsilon)}$ respectivamente; para ε pequeño son casi iguales a la cantidad finita $\frac{g'(a)}{g(a)}$. Por tanto, para ε pequeño y positivo, $\frac{f'(a - \varepsilon)}{f(a - \varepsilon)}$ será negativo y $\frac{f'(a + \varepsilon)}{f(a + \varepsilon)}$ será positivo, además ambas serán grandes en valor absoluto ■ [14].

Teorema 4.- De Rolle. Entre dos raíces consecutivas a, b $a < b$ de un polinomio $f(x)$ hay por lo menos una, y siempre, un número impar de raíces de su derivada $f'(x)$, es decir, existe por lo menos un punto c en el intervalo tal que $f'(c) = 0$

Demostración: El signo de $f(x)$ no puede cambiar en el intervalo $a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon$ desde que a y b son raíces consecutivas. Entonces $f(a + \varepsilon)$ y $f(b - \varepsilon)$ poseen el mismo signo, si ε es pequeño y $\varepsilon > 0$, por la Proposición 1, $\frac{f'(a + \varepsilon)}{f(a + \varepsilon)} > 0$ y $\frac{f'(a - \varepsilon)}{f(a - \varepsilon)} < 0$. En consecuencia $f'(a + \varepsilon)$ y $f'(a - \varepsilon)$ son de

signos contrarios y entre el intervalo (a, b) , por el Corolario 4 debe haber por lo menos una raíz de la derivada $f'(x)$ y el número de raíces, de acuerdo con su multiplicidad, será impar ■ [3][14].

Por el Teorema 4 De Rolle se sabe que existe un punto m en el intervalo abierto (x_1, x_2) de (5) con derivada nula en dicho punto

$$f'(m) = 0 \quad (8)$$

El dicho punto m debe tener dos coordenadas; es decir una pareja ordenada: [2]

$$m(\alpha, \beta) \quad (9)$$

Para hallar el valor de la primera coordenada α (9) se obtiene la derivada de (5) que es:

$$f'(x) = 2x + b \quad (10)$$

Al evaluar α en (10) se tiene:

$$f'(\alpha) = 2\alpha + b = 0 \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{-b}{2} \quad (12)$$

Para hallar el valor de β (9) se evalúa (12) en (5).

$$f(\alpha) = \beta \quad (13)$$

$$f(\alpha) = \left(\frac{-b}{2}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2}\right) + c \quad (14)$$

$$f(\alpha) = -\alpha^2 + c \quad (15)$$

$$\beta = -\alpha^2 + c \quad (16)$$

Por otro lado, la ecuación (5) se puede reescribir de la forma:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4} + c\right) = 0 \quad (17)$$

De tal manera que si se realiza una sustitución de (12) y (15) en (17) se obtiene la expresión:

$$(x - \alpha)^2 + \beta = 0 \quad (18)$$

Para hallar $x_{1,2}$ se reescribe (18) en función de x .

$$x_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{-\beta} \quad (19)$$

Teorema 5.- Si $a \neq 0 \rightarrow a^2 > 0$.

Demostración: Si $a > 0$ entonces $a \cdot a > 0 \rightarrow a^2 > 0$. Si $a < 0 \rightarrow -a > 0$ entonces $-a \cdot -a > 0$, es decir, $a^2 > 0$ ■ [3]

Se observa que β en (19) es muy importante, ya que si:
 $\beta \leq 0 \rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$ (20)

Es decir, se obtiene una raíz cuadrada positiva $\sqrt{\beta}$ y por el Teorema 5 también se nota que si $a = 0$; $x = 0$ es la única raíz cuadrada. Si se supone que $a > 0$ y si $x^2 = a$, entonces $x \neq 0$ y $(-x)^2 = a$. Por tanto, x y su opuesto son ambas raíces cuadradas, pero a lo mucho tiene dos; ya que si $x^2 = a$ e $y^2 = a$ implica que $x^2 = y^2$ y $(x + y)(x - y) = 0$ y en virtud de que $x = y$ o $x = -y$. Por lo tanto, si a tiene raíces cuadradas, tiene exactamente dos [1] sin contar sus multiplicidades.

Entonces:

$$\beta \leq 0 \rightarrow x_{1,2} \in \mathbb{R} \quad (21)$$

Pero si $\beta > 0$, entonces obtenemos una raíz negativa $\sqrt{-\beta}$.

Por el Teorema 5 se puede inferir que los números negativos no poder tener raíces cuadradas pues si $x^2 = a$, al ser a un cuadrado ha de ser no negativo [1], es decir, no está definida en $\mathbb{R}$.

Definición 5.- Se designan con $\mathbb{C}$ al conjunto de números complejos $\mathbb{C} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ [9].

Definición 6.- Si $a \wedge b \in \mathbb{R}$, el par ordenado (a, b) se llama número complejo z ; $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ [1].

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ satisface los nueve Axiomas del campo de los reales $\mathbb{R}$; por tanto, todas las leyes del álgebra que se deducen del conjunto de los Axioma de $\mathbb{R}$ son válidos en $\mathbb{C}$ y por tanto se deduce que $\mathbb{C}$ es un cuerpo [1][9].

Si $\exists \mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C} | (a, 0) \in \mathbb{C}_0$, la adición o el producto de dos elementos de $\mathbb{C}$ también pertenecen a $\mathbb{C}_0$. Los números de $\mathbb{C}_0$ se comportan del mismo modo que si fueran números reales. Por tal motivo, no se hace distinción entre el número real x y el número complejo $(x, 0)$. Desde este punto se observa que el sistema de números complejos como una extensión de los números reales [1].

Definición 7.- Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales; existe la función f que aplica cada número real a en el número complejo $(a, 0)$; $f(x) = (a, 0) | a \in \mathbb{R}$ [1][4].

La función f tiene como dominio $\mathbb{R}$ y como recorrido $\mathbb{C}_0$ aplicando elementos distintos de $\mathbb{R}$ en elementos distintos de $\mathbb{C}_0$. Se dice que f establece una correspondencia uno a uno entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_0$ [1][4].

Ya que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}_0$ satisfacen los Axiomas, se dice que son isomorfos y la función f que los relaciona se denomina isomorfismo [1].

El conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ es una extensión de los números reales $\mathbb{R}$ porque contiene un subconjunto $\mathbb{C}_0$ isomorfo a $\mathbb{R}$ [4].

Definición 8.- El número complejo $(0, 1)$ se representa con la letra i y se le denomina unidad imaginaria. Cumple la propiedad $i^2 = i \cdot i = -1$ [12].

Por tanto, cuando $\beta > 0$, por la Definición 8, se puede reescribir como:

$$\beta > 0 \rightarrow \sqrt{-\beta} = i\sqrt{\beta} \quad (22)$$

$$\{f(x_1), f(x_2)\} \neq 0 \quad (23)$$

En el caso de (22), f (5) tendría raíces complejas:

$$x_{1,2} \in \mathbb{C} \quad (24)$$

Esto implica una reescritura de (19) cuando $\beta > 0$ (22):

$$x_{1,2} = \alpha \pm i\sqrt{\beta} \quad (25)$$

De esta manera se ha obtenido un algoritmo denominado Algoritmo J1 (19)(25), para solucionar ecuaciones cuadráticas con raíces $x_{1,2}$ definidas en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$.

Entonces en el Algoritmo J1 el conjunto de raíces definido como ς , está dado por:

$$\varsigma \begin{cases} x_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{-\beta} \leftrightarrow \beta \leq 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{R} \\ x_{1,2} = \alpha \pm i\sqrt{\beta} \leftrightarrow \beta > 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (26)$$

III. ALGORITMO J1

El Algoritmo J1 se puede interpretarse como:

$$\begin{aligned} (x^2 + bx + c = 0 | b, c \in \mathbb{R}) \rightarrow \\ (\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} | \alpha = \frac{-b}{2} \wedge \beta = -\alpha^2 + c) \rightarrow \\ \varsigma \begin{cases} x_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{-\beta} \leftrightarrow \beta \leq 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{R} \\ x_{1,2} = \alpha \pm i\sqrt{\beta} \leftrightarrow \beta > 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{C} \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

Cuyo diagrama de flujo es:

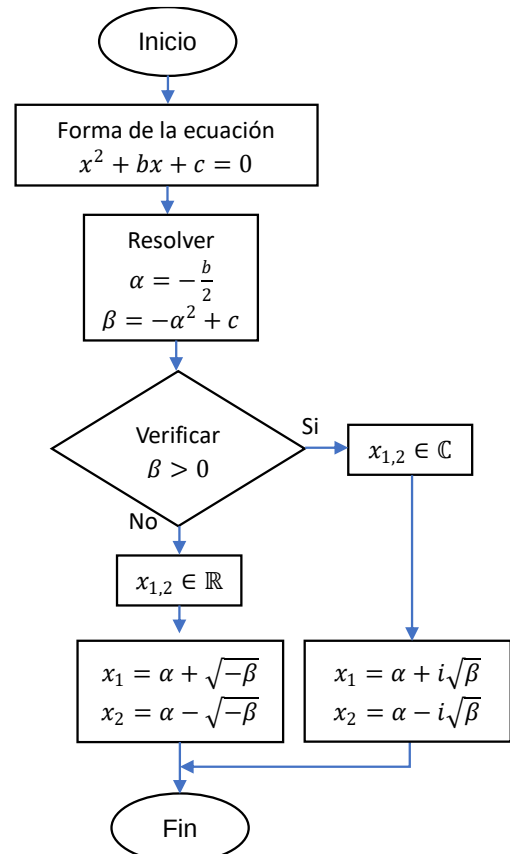


Fig. 1.- Diagrama de flujo Algoritmo J1

IV. CASOS

A continuación se muestran algunos ejemplos de resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma (5) utilizando Al algoritmo J1 (27).

Caso 1.- $x^2 + x + 1 = 0$

$$\alpha = \frac{-b}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = -\alpha^2 + c = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$\beta > 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{C}$$

$$x_{1,2} = \alpha \pm i\sqrt{\beta} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Caso 2.- $x^2 - x - 6 = 0$

$$\alpha = \frac{-b}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = -\alpha^2 + c = -\frac{1}{4} - 6 = -\frac{25}{4}$$

$$\beta \leq 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{R}$$

$$x_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{-\beta} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-(-\frac{25}{4})} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_{1,2} = \{-2, 3\}$$

Caso 3.- $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\alpha = \frac{-b}{2} = 1$$

$$\beta = -\alpha^2 + c = -1 + 1 = 0$$

$$\beta \leq 0 \therefore x_{1,2} \in \mathbb{R}$$

$$x_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{-\beta} = 1 \pm \sqrt{0}$$

$$x_{1,2} = \{1, 1\}$$

V. OTROS MÉTODOS

Se presentan diagramas de flujo de algunos de los métodos más conocidos para resolver ecuaciones cuadráticas.

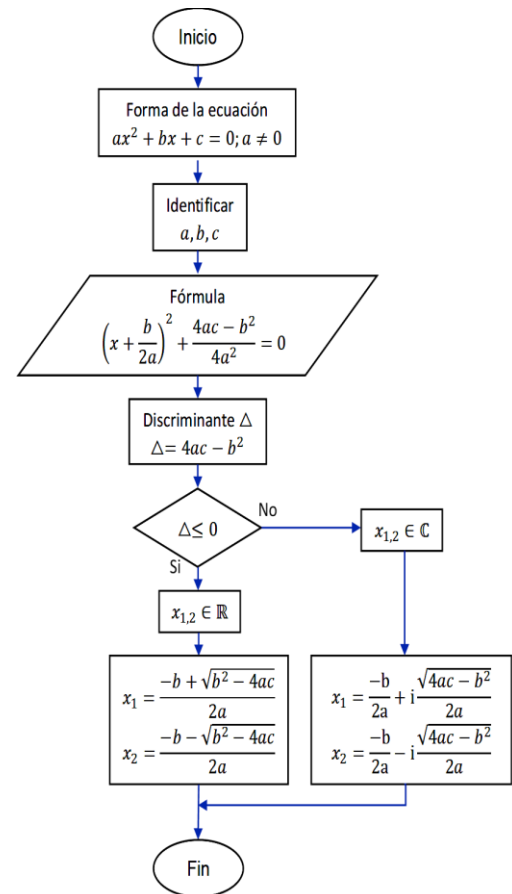


Fig. 2.- Diagrama de flujo de la resolución de ecuaciones por medio de la fórmula general.

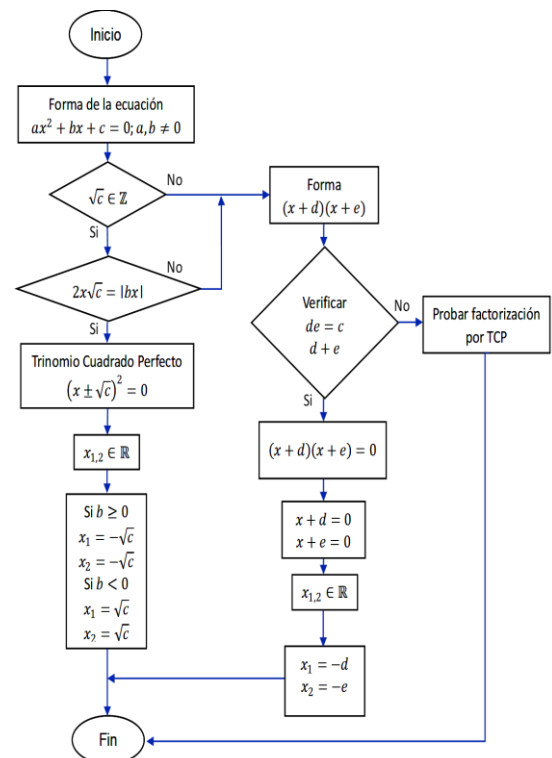


Fig. 3.- Diagrama de flujo de la resolución de ecuaciones por medio de factorización.

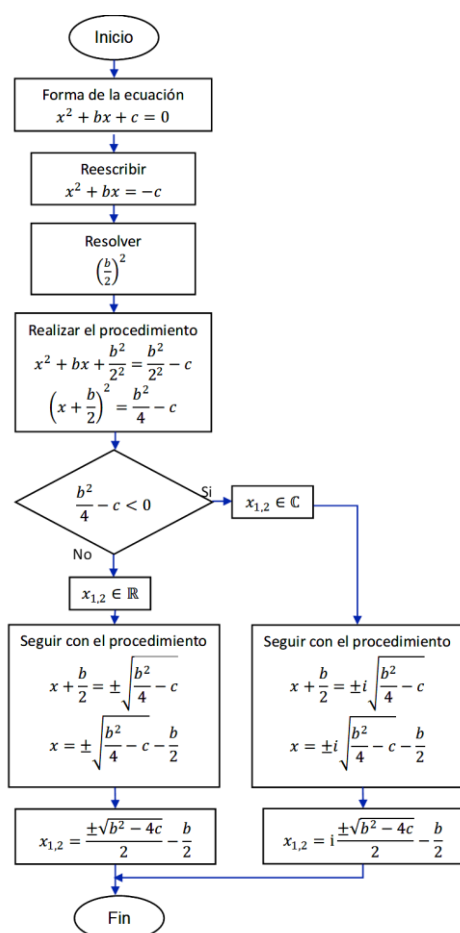


Fig. 4.- Diagrama de flujo de la resolución de ecuaciones por medio factorizar un TCP.

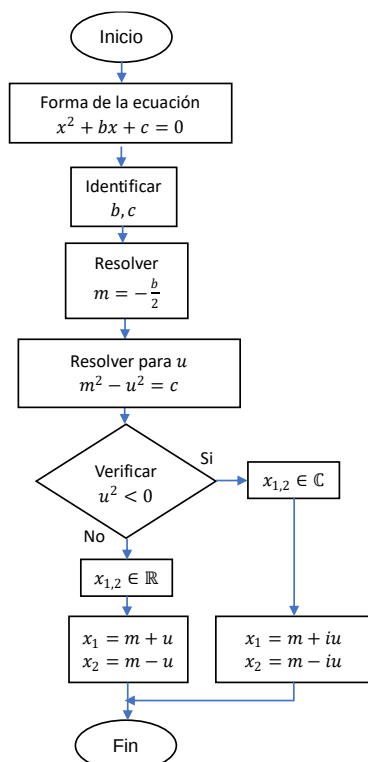


Fig. 5.- Diagrama de flujo de la resolución de ecuaciones por medio de Po-Shen Loh.

VI. COMPARACIÓN

El método que se utilizará para comparar los algoritmos es el método de conteo de pasos para análisis de la complejidad de tiempo el cual cuenta el número de veces que se ejecuta cada instrucción, en base a eso se calculará la complejidad del tiempo y podremos clasificar los algoritmos en diferentes dificultades [15]. Para poder comparar un algoritmo con otro debemos buscar que tan eficientes son. Existen diferentes métodos para analizar los algoritmos, es decir, compararlos entre sí en un mismo campo de análisis.

A un conjunto de funciones que comparten un mismo comportamiento asintótico le denominaremos un orden de complejidad, estos conjuntos se les denomina O [15]. En la Fig. 6 se observa el comportamiento que tienen las funciones dependiendo de la complejidad de la entrada del algoritmo.

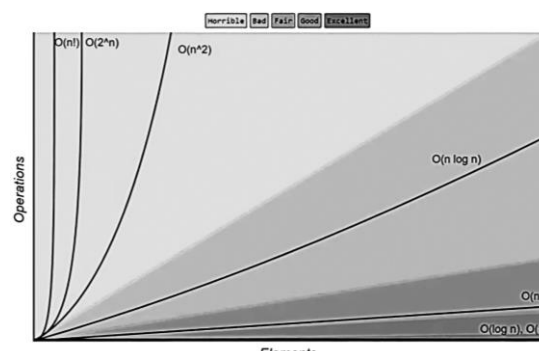


Fig. 6.- Gráficas polinomiales de complejidad.

Para analizar la complejidad de los algoritmos se considera un orden de complejidad Fig. 7.

Orden de complejidad	
$O(1)$	Orden constante
$O(\log n)$	Orden logarítmico
$O(n)$	Orden lineal
$O(n \log n)$	
$O(n^2)$	Orden cuadrático
$O(n^a)$	Orden polinomial $a > 2$
$O(a^n)$	Orden exponencial $a > 1$
$O(n!)$	Orden factorial

Fig. 7.- Tabla de orden de complejidad

La figura 8 muestra los algoritmos con su respectivo conteo de pasos basado en el orden de complejidad.

Algoritmo	Conteo de pasos
Fórmula General	$2(a^n) + 1(n^2) + 1(n) + 6(1)$
Factorización	$4(a^n) + 2(n^2) + 3(n) + 6(1)$
Completar el TCP	$2(a^n) + 2(n^2) + 6(n) + 4(1)$
Po-Shen Loh	$1(a^n) + 1(n^2) + 4(n) + 4(1)$
Teorema J1	$2(a^n) + 1(n^2) + 1(n) + 4(1)$

Fig.8.- Tabla de conteo de pasos.

La figura 9 muestra el número de pasos y el nivel de complejidad de cada algoritmo.

Algoritmo	Número de pasos	Complejidad
Fórmula General	10	$O(a^n)$
Factorización	15	$O(a^n)$
Completar el TCP	14	$O(a^n)$
Po-Shen Loh	10	$O(a^n)$
Teorema J1	8	$O(a^n)$

Fig.9.- Tabla de conteo de pasos.

VII. CONCLUSIÓN

El Algoritmo J1 (27) es una alternativa que se puede utilizar en la resolución de ecuaciones cuadráticas con la ventaja que sus raíces están definidas tanto en los números reales $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ (21) como en los números complejos $x_{1,2} \in \mathbb{C}$ (24); además, otra primacía de (27) es la menor cantidad de pasos al momento de resolver ecuaciones de la forma (5) que se puede notar a simple vista en el apartado IV y que se confirma en el apartado VI donde, por medio del método de conteo de pasos para análisis de la complejidad de tiempo, el algoritmo J1 (27) tiene una ligera ventaja en la cantidad de pasos respecto a los demás algoritmos, ya que en el peor caso, la ecuación cuadrática se resolvería con 8 pasos, superando al algoritmo más cercano Po-Shen Loh en dos pasos.

Se observa que β (16) juega un rol muy importante, ya que dependiendo de su valor es como se va a definir el comportamiento de sus raíces (27).

También, aunque es fácil notarlo, el Algoritmo J1 (27) posee una descripción con un enfoque más geométrico, pero en este artículo no se aborda ya que se le da prioridad al enfoque algebraico; en [6] se puede encontrar una descripción geométrica de (27).

REFERENCIAS

- [1] Apostol, T.: Calculus I. Editorial Reverté. (1984). Barcelona
- [2] Baumslag, B. y Chandler, B.: Theory and problems of group Theory. McGraw-Hill, Inc. (1968).USA.
- [3] Bourbaki, N.: Functions of a Real Variable. Elementary Theory. Springer. (2004). Berlín
- [4] Fine, B. y Rosenberger, G.: The Fundamental Theorem of Algebra. Springer (1997).New York.
- [5] Flores, J. W.: Breve deducción de las fórmulas de Cardano a través del polinomio de Taylor. *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos*, No.3, julio-diciembre 2020, p.43. (2020) Ciudad de México, México.
- [6] Flores, J. W.: Descripción de la resolución de ecuaciones cuadráticas a través de la representación del vértice de su parábola. *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos*, No.5, julio-diciembre 2021, p.11. (2021)Ciudad de México, México.
- [7] Kaye G. R.: Indian Mathematics. The University of Chicago Press. (1919). USA.
- [8] Rodet, M. L.: Leçons de calcul d'Âryabhata. Imprimerie Nationale. (1879). Paris.
- [9] Salcedo, L.:Variable compleja. Universidad de Granada. (2015). España.
- [10] Sanford, V.: Short History of Mathematics. Houghton Mifflin Company. (1930). USA
- [11] Smith, D.: History of Mathematics Vol. 2. Dover (1953). New York.
- [12] Spiegel, M. y Moyer, R.: Álgebra superior. McGraw-Hill Interamericana. (2007). México.

[13] Stewart, J.: Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas. Cengage Learning. (2008). México

[14] Uspensky, J.V.: Theory of equations. McGraw-Hill Inc. (1963). USA

[15] Wilf, H.: Algorithms and Complexity. A. K. Peters CRC Press. (2002). New York

.

Modelado matemático para estabilidad de sistemas discretos no autónomos con retardo infinito mediante control Lyapunov-Razumikhin.

Marcos Fajardo Rendón

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

fajardoensm@gmail.com

Resumen- El presente artículo propone el diseño de un modelo general de para lograr la estabilidad de sistemas discretos controlados con retardo infinito mediante el uso de una fase admisible para sistemas discretos utilizando la dinámica topológica de los sistemas controlados; así como las propiedades de invariancia respecto a un conjunto definido con límite positivo para obtener un modelo de soluciones de estabilidad asintótica de funciones Lyapunov-Razumikhin.

Palabras Clave- modelado matemático, función Lyapunov-Razumikhin, sistemas discretos no autónomos, retardo infinito.

Abstract- This article proposes the design of a general model to achieve the stability of controlled discrete systems with infinite delay by using an admissible phase for discrete systems using the topological dynamics of controlled systems; as well as the invariance properties with respect to a defined set with a positive limit to obtain a solution model of asymptotic stability of Lyapunov-Razumikhin functions.

Keywords- mathematical modeling, Lyapunov-Razumikhin function, no-controlled discrete systems, unlimited delay.

Mathematical Subject Classification: 37C20.

I. INTRODUCCIÓN

En el modelado de sistemas es importante considerar que la realidad es caótica y siempre existe al menos un retardo entre el tiempo en el que una señal proveniente de un sensor, proceso, actividad o cambio en variables como la temperatura y otros factores es procesado por el sistema de control sea orgánico o artificial; un modelo que no considere esos factores será incompleto, pese a que se considere descartable el tiempo de reacción para propósitos prácticos.

Las señales de éste tipo se grafican como asintóticas y se han explicado en trabajos de control PID (*Proporcional Integral Derivativo*) que buscan predecir el comportamiento para tender a formar una señal digital como [1]; sin embargo siempre tendrán un tiempo de pérdida por el ajuste al cambio denominado retardo y jamás podrán ser exactas por lo que las técnicas de aproximación deben considerar los tiempos de llegada de la señal a la medición para un óptimo control, sobre todo en donde es oscilatorio o no se puede predecir un retardos como sucede en la naturaleza y sistemas biológicos como ecosistemas, poblaciones o , teleoperación, mecatrónica y navegación en ambientes no predecibles.

El modelado de control en sistemas dinámicos requiere conocer el histórico del comportamiento de éste donde los retardos pueden ser constantes, variables o distribuidos.

Los sistemas no autónomos [2][3] son aquellos en donde el tiempo es modelado como variable independiente y definido con una estructura de comportamiento como pueden ser los retardos; ya que los estados previos son importantes para la predicción y control afectando siempre al sistema [4].

En el modelado de retardos para sistemas de tiempo discreto [5] es necesario conocer la dependencia del estado actual con respecto a los n posibles estados anteriores del sistema; independientemente que no cuenten con un periodo que los haga predecibles o con sincronización entre todos o parte de ellos; es decir sistemas discretos con un retardo infinito [6].

Trabajos que buscan la estabilidad respecto a restricciones entre distintos elementos de un sistema como el modelo Lotka-Volterra [7][8][9] inspirado en modelos de Malthus [10] permiten describir la interacción entre especies, su estabilidad [11] con sus recursos y otras especies del ecosistema; siendo utilizados para modelar procesos industriales y de control de máquinas.

La diferencia entre una ecuación discreta con retardo infinito y una con retardo finito es que la finita es fija y siempre puede reducirse a un sistema discreto con un solo paso y dimensión delimitada que evita su movimiento; permitiendo limitar su rango de movimiento para construir modelos generales descritos como funciones de Lyapunov [12][13] que permiten obtener condiciones óptimas de estabilidad con la técnica presentada en los trabajos de Razumikhin [14].

Al no poder reducir de la forma anterior ecuaciones en el modelo Volterra [9], el modelo debe formular una generalización de estabilidad similar de sistemas continuos con retardo infinito[15] respecto funciones definidas sobre soluciones de ecuaciones que sean dependientes de sus antecesoras, ya que el histórico del sistema contribuye a la predicción de la estabilidad sistémica o mediante funciones que utilizan otras funciones de tipo auxiliar [14] de sistemas discretos no autónomos con retardo infinito que requieren implementar una síntesis de sus elementos que lo componen utilizando limitantes en sus ecuaciones [16].

II. PROBLEMA Y DEFINICIONES.

Sea $\mathbb{E}^m$ un punto definido en un espacio euclidiano m -dimensional real [13] $|\cdot|$; con un espacio vectorial B de funciones discretas $\phi \{ \phi \}$, dado por:

$$\mathbb{Z}^- = \{-\infty, \dots, 0\}_{\mathbb{B}} \mathbb{E}^m \quad (1)$$

Escolio

Un punto en el espacio euclidiano $\mathbb{E}$ tridimensional puede ser ubicado mediante el símbolo $\|\cdot\|$; el término es utilizado para diferenciarlo de espacios "curvos" en geometrías no euclidianas y del espacio respecto a la teoría de la relatividad de Einstein.

En el caso del presente artículo al poseer m dimensiones se denomina al espacio euclídeo $\mathbb{E}$ de tipo m -dimensional: $\mathbb{E}^m$; al ser el espacio en $\mathbb{R}$ también puede ser indicado como $\mathbb{R}^m$.

Así mismo el par formado por un espacio $\mathbb{B}$ y otro valor B definidos en el espacio $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$, siendo ésto un espacio lineal que queda definido por el conjunto:

$$(B, \|\cdot\|_{\mathbb{B}}) \quad (2)$$

Completado por la función discreta [13]:

$x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}^m$ dado por la función $x_n: \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{E}^m$ para un valor donde $n \in \mathbb{Z}$ mediante $x_n(k) = x(n+k) | k \leq 0$.

Definición 1

Sea B un espacio admisible con $K > 0$, $J > 0$ y una función $M: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que cumple las condiciones $x: \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{E}^m$ limitado al conjunto $[n_0, +\infty)$ y $x_{n_0} \in B$ [13].

Para $\forall n \in [n_0, +\infty)$ sea:

- 1) $x_{n_0} \in B$
- 2) $\|x_n\|_{\mathbb{B}} \leq K \max_{n_0 \leq k \leq n} |x(k)| + M(n - n_0) \|x_{n_0}\|_{\mathbb{B}}$
- 3) $|\varphi(0)| \leq J \|\varphi\|_{\mathbb{B}}; \forall \varphi \in B$
- 4) $M(n) \rightarrow 0 \mathbb{R}^+ | n \rightarrow +\infty$

6) Si φ se Limita a $\mathbb{Z}^-$; con $\varphi \in B$ y todas las características $\varphi_{-n}, n \geq 0$ de acuerdo con las cláusulas del espacio $B, \|\varphi_{-n}\|_{\mathbb{B}} \leq \mathbb{Z}^-$. Para algunos otros $Limite > 0$ ■.

Sean los espacios admisibles de acuerdo con [13][14]:

$$B_a = \{\varphi \in B: \|\varphi\|_{\mathbb{B}} < a\}. \quad (3)$$

Considérese un sistema de ecuaciones no lineales para sistemas no-autónomos con retardo infinito [16] basado en (2) y (3):

$$x(n+1) = f(n, x_n), \quad f(n, 0) \equiv 0 \quad (4)$$

Para algunos intervalos H con el espacio admisible B anteriormente definido; dónde $f(n, \varphi): \mathbb{Z}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{E}^m$.

$0 < H \leq +\infty; \exists \varphi$ por cada $n \in \mathbb{Z}^+$ que describe el límite para cada conjunto $\mathbb{Z} \times D$; dónde $D = \bar{B}_h, |f(n, \varphi)| \leq m(h)$; donde el orden en tamaño: $\forall (n, \varphi) \in \mathbb{Z}^+ \times \bar{B}_h, 0 < h < H$

para cada punto inicial queda indicado por $(n_0, \varphi) \in \mathbb{Z}^+ \times B_H$ existirá una solución (4) $x(n; n_0, \varphi), x_{n_0} = \varphi$ [14][16].

Proposición 1

La función $f(n, \varphi)$ es uniformemente continua en el conjunto esperado $\mathbb{Z}^+ \times D | D \subset B_H$; es decir: $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta = \delta(\varepsilon, D) | \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$ con $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathbb{B}} < \delta$ Será:

$$|f(n, \varphi_1) - f(n, \varphi_2)| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (5)$$

Sea $F = \{f: \mathbb{Z}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{E}^m\}$ un espacio vectorial continuo de funciones [16]; para $f \in F$ define un conjunto de turnos $T(f) = \{f_k(n, \varphi) = f(n+k, \varphi), k \in \mathbb{Z}^+\}$ susceptibles a retardos [16]; denotando que $H(f)$ de un espacio compacto [15], denotado por la definición de la función Ω :

$$\Omega(f) = \{f^* \in F: \exists n_k \rightarrow +\infty, f_{n_k} \rightarrow f^*_{\mathbb{B}_F}\} \quad (6)$$

Sin embargo $H(f) = T(f) \cup \Omega(f)$. Comparando con el límite de la ecuación (4) se obtiene una nueva ecuación de trabajo:

$$x(n+1) = f^*(n, x_n) \quad (7)$$

Donde $f^*(n, \varphi) \in \Omega(f)$ es el límite determinado por la función $f(n, \varphi)$ la cuál es no secuencial donde $n_k \rightarrow \infty$; $f^*(n, \varphi) = f_{n_k}(n, \varphi)$ para $(n, \varphi) \in \mathbb{Z}^+ \times B_H$.

Lo anterior permite obtener una convergencia uniforme en cada conjunto $[0, N]$, dónde $N > 0, D \subset B_H$ [16] ■.

Lema 1

Sean las secuencias:

$$n_k \rightarrow +\infty, \{\varphi_k\} \in D \subset B_H, \varphi_k \rightarrow B_H \text{ en } k \rightarrow +\infty, \text{ y } x(n, n_k + n_0, \varphi_k) \quad (8)$$

Resolviendo (8) en (4) se obtiene:

$$\{x^{(k)}(n) = x(n + n_k; n_k + n_0, \varphi_k)\} \quad (9)$$

Contenida como $D_x \subset B_H \rightarrow f^*(n, x_n)$ y siendo el límite de $f(n, x_n)$.

Relativamente $n_k \rightarrow +\infty$ y $D_x, x^*(n; n_0, \varphi)$ es la solución a la ecuación (7), determinada en $\mathbb{Z}$; por lo que $\{x^{(k)}(n)\}$ converge con $x^*(n; n_0, \varphi)$, con $x_n^{(k)} \rightarrow x^*$ uniformemente en $n \in [n_0, n_0 + N]$ para cada $N \in \mathbb{N}$.

Para resolver $x(n) = x(n; n_0, \varphi)$ en (4) con límite positivo; el nuevo conjunto es: $\Omega^+(x_k(n_0, \varphi))$ definida como:

$$\Omega^+(x_k(n_0, \varphi)) = \bigcap_{n \geq n_0} \overline{\{x_k: k \geq n\}} \quad (10)$$

La ecuación (10) contiene los límites de las sucesiones $\{x_{n_k}\}$ en $n_k \rightarrow +\infty$; siendo no vacío y en el límite positivo del conjunto $\Omega^+(x_n(n_0, \varphi))$; de la misma forma para las soluciones de $x(n; n_0, \varphi)$ [15] ■.

Lema 2.

Utilizando la solución del sistema (4) $x(n; n_0, \varphi)$ limitado por $n \in \mathbb{Z}^+$, $|x(n; n_0, \varphi)| \leq r \leq H$ el conjunto $\Omega^+(x_n(n_0, \varphi))$ es *cuasivariante* [16] con respecto al conjunto de límites del sistema (7); es decir para cada punto $\psi \in \Omega^+(x_n(n_0, \varphi)) \exists$ una ecuación límite $x(n+1) = f^*(n, x_n)$ cuya solución $x^*(n; 0, \psi)$ satisface a $\{x_n^*(0, \psi) \in \Omega^+(x_n(n_0, \varphi)); \forall n \in \mathbb{Z}^+\}$ ■.

Demostración 1.

Sea $n_k \rightarrow +\infty$ una secuencia por la cual:

$$x_{n_k}^k = x_{n_k}(n_0, \varphi) \rightarrow \psi \text{ en } k \rightarrow +\infty \quad (11)$$

Utilizando (4) se obtiene $x_{n_k} \rightarrow +\infty |f_j(n, \varphi) = f(n + n_k, \varphi)$ converge con $f^*(n, \varphi) \in F$ en $j \rightarrow +\infty$; $\therefore$ acorde al lema 1.

La sucesión de funciones basada en (11) viene dada por:

$$x^j(n) = x(n_{k_j} + n, n_{k_j}, x_{n_{k_j}}) = x(n_{k_j} + n + n_0 + \varphi) \quad (12)$$

Convergiendo [14] la ecuación (12) con las ecuaciones $x_n^*(n; 0, \psi)$ y $x(n+1) = f^*(n, x_n)$ de (5).

Igualmente para todos los elementos del conjunto $\{0, 1, \dots, N\}$.

Debiendo ser $x_n^*(n; 0, \psi) | n \in \mathbb{Z}^+$ con cada punto $x_n^*(0, \psi)$ que será el límite para la sucesión válida $\{x_{n_{k_j}+n}(n_0, \varphi), n \geq 0\}$ en $j \rightarrow +\infty$.

Por lo que si $x_n^*(0, \psi) \in \Omega^+(x_n(n_0, \varphi)) | \forall n \geq 0$ ■.

III. FUNCIONES DE LYAPUNOV-RAZUMIKHIN.

Sea la función de Lyapunov [12][13][14]:

$$G_H = \{x \in \mathbb{E}^m: |x| < H\}. \quad (13)$$

La ecuación (13) es diferente a (4) por la existencia de una función racional $V: \mathbb{Z}^+ \times B_H \rightarrow \mathbb{R}$; $V(n, x_n) = V(n+1, f(n, x_n)) - V(n, x(n))$ para el conjunto $\mathbb{Z}^+ \times B_H$ define una función continua $W \in \mathbb{R}^+$ dada por:

$$V = V(n, x) \in C(\mathbb{Z}^+ \times G_H, \mathbb{R}^+) \quad (14)$$

Definición 2.

Al par (V, W) se denomina Lyapunov–Razumikhin [14], si para cada $k > 0, n \geq k$ tiene las características $\varphi \in B_H | \varphi - k \in B_H; \varphi \in [-k, 0]$; así mismo: $\max = \{\max_{-k \leq m < 0} V(n+m, \varphi(m)), W(n-k, \varphi_{-k})\}$ [15].

Desarrollando el par (V, W) se obtiene:

$$V(n, \varphi(0)) \leq W(n, \varphi) \leq \max \leftrightarrow 0 < H(n, \varphi(0)) = W(n, \varphi) \rightarrow V(n, \varphi) \leq 0 \text{ ■.} \quad (15)$$

Proposición 2.

Si la función (14) es similarmente continua e ilimitada [15]; es decir para $\forall r, 0 < r < H; \exists m = m(r) | (n, x) \in \mathbb{Z}^+ \times G_r$.

Donde: $\overline{G_r} = \{x \in \mathbb{E}^m: |x| \leq r < H\}$

Con la condición $|V(n, x)| \leq m(r); \forall \varepsilon > 0; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \approx x_1, x_2 \in \overline{G_r}. |x_1 - x_2| < \delta \rightarrow |V(n, x_1) - V(n, x_2)| < \varepsilon | \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ■.}$

Proposición 3.

Si las funciones $W(n, \varphi)$ y $U(n, x) = V(n, \varphi)$ son aproximadamente continuas y limitadas [14] por el intervalo: $\mathbb{Z}^+ \times D | D \subset B_H$ y bajo los supuestos [14][15]; entonces las familias de turnos $\{V_k(n, x) = V(n+k, x), k \in \mathbb{Z}^+\}, \{U_k(n, \varphi) = U(n+k, \varphi), k \in \mathbb{Z}^+\}$; $\{W_k(n, \varphi) = W(n+k, \varphi), k \in \mathbb{Z}^+\}$.

Entonces serían compactos [16] en los espacios: $C(\mathbb{Z}^+ \times W_k, \mathbb{R}^+)$, $C(\mathbb{Z}^+ \times D, \mathbb{R})$ y $C(\mathbb{Z}^+ \times D, \mathbb{R}^+) | D \subset B_H$ como conjunto abierto [17] ■.

Definición 3.

Sea la función:

$$V^*: \mathbb{Z} \times G_H \rightarrow \mathbb{R} \quad (16)$$

El límite de la función V^* tiene una estructura similar a (14) y queda definido como el producto cartesiano de ambos conjuntos; si existe la secuencia $n_{k \rightarrow +\infty}$ cuya subsecuencia será: $\{V_k(n, x) = V(n+n_k, x)\}$ convergiendo [16] uniformemente sobre múltiples propiedades $[\mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}] \times \overline{G_r}$ en (16) y sus funciones límite $W(n, \varphi)$ y $U(n, \varphi)$; determinadas por $f^*(n, \varphi)$ ■.

Definición 4.

Dadas las funciones $f^*, v^* w^* u^*$ que limitan al conjunto: $(f^*, v^* w^* u^*)_D$ que es límite para la misma secuencia $n_{k \rightarrow +\infty}$ y $D \subset B_H$ como conjunto abierto [17]; éstas satisfacen las funciones $V(n, x)$ y $W(n, \varphi)$ ■.

Proposición 4.

Si:

$$\forall c > 0; \exists \xi = \xi(c); \forall \varphi \in D, n \in \mathbb{Z} \left| \sup_{k \leq 0} V^*(n+k, \varphi(k)) \leq W^*(n, \varphi) = \sup_{k \leq 0} V^*(n+k, \varphi(k)) \leq W^*(n, \varphi) = c \right| W^* \in \mathbb{Z} \times D. \quad (17)$$

Desarrollando (17) se obtiene:

$$W^*(n, \varphi) = \max_{-N \leq k \leq 0} V^*(n+k, \varphi(k)). \quad (18)$$

$C_0 \in \mathbb{R}$ y la secuencia [16] $n_k \rightarrow +\infty$ la definirán los conjuntos dados por:

$$\begin{aligned} N(n, c_0, \xi, V^*) &= \{\varphi \in B_H: \max_{-\xi \leq k \leq 0} V^*(n+k, \varphi(k)) = c_0\}; \\ M(n, c_0, \xi, V^*) &= \{\varphi \in N(n, c_0, \xi, V^*): V^*(n, \varphi(0)) = c_0\}; \\ L(n, D, U^*) &= \{\varphi \in D: U^*(n, \varphi) = 0\} \end{aligned} \quad (19)$$

Si el espacio admisible B es separable; las familias de turnos para f, W, U son *precompactas* [16] en $\mathcal{C}(\mathbb{Z} \times B_H, \mathbb{E}^m(\mathbb{R}))$, donde el mapeo límite correspondiente está definido en todos los espacios $\mathbb{Z} \times B_H$ dependiente de la secuencia $n_k \rightarrow +\infty$ del sistema (4).

En el caso de un espacio separable; el conjunto $L(n, D, U^*) = L(n, U^*)$.

Debido a que la órbita positiva de la solución del sistema (4) es *precompacta* [16] en B_H ; los resultados se establecen para B_H como un espacio separable [16] y por lo tanto se trasladan a un espacio inseparable de acuerdo con [16] realizando cambios en estructuras que incluyen la dependencia del conjunto compacto $D_x \subset B_H$ [16].

En el sistema (4) existe un par Lyapunov–Razumikhin (V, W) definido en la proposición siguiente ■.

Proposición 4

Sea:

- 1) La solución del sistema (4) está definida y acotada para $\forall(n) \geq n_0, x(n; n_0, \varphi) \leq r < H$.
- 2) Si se cumplen los supuestos 1.1 y 2.1–2.3; $\exists c_0 = \text{const} | \forall \Psi \in \Omega^+(x_{n_0}(n_0, \varphi))$ teniendo como límite el conjunto $(f^*, v^* w^* u^*)_D$ y como soluciones $(x^*(n; 0, \Psi))$ limitado por el sistema $x(n+1) = f^*(n, x_n) | x_n^* \in \Omega^+(x_{n_0}(n_0, \varphi)); x_n^* \in \mathbb{N}(n, c_0, \xi, V^*)$, siendo $x_n^* \in L(n, D, U^*)$ ■.

Demostración 2.

Dada la solución $x(n; n_0, \varphi), x_n(n_0, \varphi), p \in B_\delta$; limitando a algunos $\delta = \delta(n_0) > 0$ dentro del espacio compacto $D_x \subset B_H$ se obtiene:

$\exists c_0 \geq 0 | \forall \Psi \in \Omega^+(x_0(n_0, \varphi)), \varphi \in B_\delta$; donde su límite es $(f^*, v^* w^* u^*)_{D_x}$. Por lo que la solución al límite será:

$$x^*(n; 0, \Psi) \quad (20)$$

Que satisface a $x_{n_1}^* \in M(n_1, c_0, \xi, V^*) \cap L(n_1, D_x, U^*)$ para algún n_1 de cualquier intervalo de longitud $\tilde{N}$.

Bajo las condiciones de la proposición 4, la última relación indica que $V^*(n, x^*(n)) = 0; \forall n | \text{Lyapunov}_{lim} = n_k \rightarrow +\infty$ bajo la condición de la proposición.

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(n, x(n)) = 0 | x(n; n_0, \varphi)$ permitiendo solucionar el sistema (4) mediante el uso de B_δ .

Lo anterior permite obtener:

$$x(n; n_0, \varphi) \rightarrow 0 | n \rightarrow +\infty \blacksquare. \quad (21)$$

IV. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Al estudiar problemas de estabilidad asintótica e inestabilidad para ecuaciones discretas con retardo [2], se observa que es un método que ha sido ampliamente utilizado para modelar sistemas de control natural [9][11] y artificial [3].

El método directo para solución de funciones también es ampliamente usado cuando se construye la función $V(n, \varphi)$ y su comportamiento como se utilizó para (5).

El uso de funciones de Lyapunov [12] para ecuaciones con retardo para sistemas de tiempo continuo permite obtener soluciones a problemas de estabilidad al utilizar los principios descritos por Razumikhin [13][14][15][16].

El resultado en sistemas descrito sirve como modelo general y puede ser aplicado como solución; así como sustentar a modo de objeto matemático distintos corolarios y aplicaciones específicas para un W específico que dependa de una función de Lyapunov V como el caso de la función:

$W = \max_{-h \leq k \leq 0} V(n+k, \varphi(k))$ similar a (18) puede ser utilizada para modelar sistemas con retardo $h > 0$ o con una W determinada.

Considerando un par formado por funciones de Lyapunov [12] y una función dada; es posible calcular una primera diferencia respecto a la ecuación y construirse una nueva W debiendo considerar las características del espacio de la ecuación considerada.

Para el caso de un retardo limitado donde $h \in \mathbb{N}$ es posible reescribir a W por:

$$W(n, \varphi) = \max_{-h \leq k \leq 0} V(n+k, \varphi(k)); \text{ siendo similar a (18).}$$

La proposición 3 se cumple automáticamente con [16] en donde el uso de un par (V, W) permitió construir un modelo general para la metodología de funciones de Lyapunov [16] con retardo infinito [6] con su demostración.

REFERENCIAS

- [1] Fajardo-Rendón, M.: Diseño y construcción de un controlador de presurización PID. *Journal de Objets y Objetivos Matemáticos*, no. 5 julio-diciembre, Ciudad de México, México. (2021), p.p. 28-33.
- [2] Miller, R. K.: Almost Periodic Differential Equations as Dynamical Systems with Applications to the Existence of Almost Periodic Solutions. *Journal of Differential Equations*. (1965), p.p. 1, 3, 337–345.
- [3] Sell, G. R.: Nonautonomous Differential Equations and Dynamical Systems. I. The Basic Theory. *Transactions of the American Mathematical Society* 127 (1967), p.p. 241–262.
- [4] Sell, G. R.: Nonautonomous Differential Equations and Dynamical Systems. II. Limiting Equations. *Transactions of the American Mathematical Society* 127 (1967), p.p. 263–283.
- [5] Glendinning, P.: Non-Smooth Pitchfork Bifurcations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B* (2004), p.p. 4, 2, 457–464.
- [6] Yoshiyuki H., Satoru M. & Toshiaki N.: Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Lecture Notes in Mathematics (LNM)*, volume 1473. Springer (1991), p.p. 5-48.
- [7] Lotka, A. J.: Contribution to the Theory of Periodic Reaction. *The Journal of Physical Chemistry*, No. 14. (1910), p.p. 3, 271–274.

- [8] Lotka, A. J.: Analytical Note on Certain Rhythmic Relations in Organic Systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. U.S.A. 6. (1920), p.p. 410–415.
- [9] Volterra, V.: Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memories Of Pontifical Academy Dei New Lincei* Roma Vol. 2(1926). p.p. 31–113.
- [10] Malthus, T.R.: An Essay on the Principle of Population. Cambridge University Press. Winch, Donald; James, Patricia (eds.) (1992).
- [11] Volterra, V.: Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. *Animal Ecology*. Chapman, R. N. (ed.). McGraw–Hill. (1931)
- [12] Lyapunov, A.: M. The General Problem of the Stability of Motion: *Doctoral dissertation*, Univ. Kharkov, Academic Press, New-York & London, 1966.
- [13] Razumikhin, B.S.: Application of Lyapunov's Method to Stability Problems of Delay Systems, *Avtomat. Telemekh.*, vol. 21, no. 6, (1960). p.p. 740-748.
- [14] Razumikhin, B.S.: On the Stability of Delay Systems, *Rossiiskaya Akademiya Nauk. Prikladnaya Matematika I Mekhanika*. vol. 20, no. 4,(1956). P.p. 500-512.
- [15] Razumikhin, B.S.: *Ustoichivost' ereditarnykh sistem*, Moscow: Nauka. (1988).
- [16] Razumikhin, B.S.: A Stability Analysis Method for Systems with Aftereffect, *Doklady Akademii Nauk*, vol. 167, no. 6, (1966), p.p. 1234-1237.
- [17] Hazewinkel, M.: Open set, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer (2001).

Propuestas en modelos matemáticos originales en inteligencia artificial y probabilidad para educación, economía, seguridad ciudadana, cáncer, sismos y tránsito.

Isa Massa, Fernando Gustavo

Universidad tecnológica nacional – Facultad regional Tucumán – Rivadavia 1050, Tucumán-Argentina
ferim74@yahoo.com.ar

Resumen- el objetivo principal de la investigación es proporcionar medios empíricos en inteligencia artificial y un nuevo modelo de algoritmo evolutivo deducido del error relativo, y también desde las probabilidades una nueva forma de ver desde centros de gravedad en dos dimensiones y centros de gravedad en tres dimensiones, todo ello con el análisis de la función seno. Las matemáticas siguen un riguroso control de veracidad para demostrar que son válidas para muchos problemas entre ellos: la educación donde analizo la evolución de los métodos pedagógicos y planes de estudio, en la economía para ver la interacción entre la recesión y la evolución de la economía en el sistema crediticio, seguridad ciudadana y la predicción de lugares donde acontecerá con mayor probabilidad el delito desde la visión de seguridad física y lugares de delito. Además, de una aplicación en cantidad de vehículos y tránsito para maximizar la utilidad y un nuevo teorema en primos y desarrollo y análisis de sismos.

Palabras Clave- cáncer, economía, inteligencia artificial, probabilidades, sismos, tránsito.

Abstract- The main objective of the research is to provide empirical means in artificial intelligence and a new model of evolutionary algorithm deduced from the relative error, and also from the probabilities a new way of seeing the models from centers of gravity in two dimensions and centers of gravity in three dimensions, all with the analysis of the sine function. Mathematics follow a rigorous veracity control to demonstrate that they are valid for many problems, including: education where I analyze the evolution of pedagogical methods and study plans, in the economy to see the interaction between the recession and the evolution of the economy in the credit system, citizen security and the prediction of places where the crime will most likely occur from the perspective of physical security and places of crime. In addition, an application in number of vehicles and traffic to maximize utility and a new theorem in primes and development and analysis of earthquakes.

Keywords- cancer, economy, Artificial intelligence, probabilities, earthquakes, traffic.

Mathematical Subject Classification: 62M20

I. INTRODUCCIÓN

La realización de textos científicos en forma de artículos a revistas como JOOM, tiene un alto desafío, como hacer la investigación básica en modelos matemáticos originales. Para el presente número, se presentan cuatro modelos: uno de inteligencia artificial que se llamó algoritmo evolutivo, dos de centros de gravedad y su probabilidad el primero en 2

dimensiones y el segundo en tres dimensiones y finalmente un teorema sobre números primos. Las aplicaciones son variadas, y se eligió algunas de las más importantes como son: educación, economía, seguridad ciudadana, cáncer, sismos y tránsito. La idea es hacer un marco referencial para futuras investigaciones en este y otros conceptos de interés social y científico. Se convierte en un factor de análisis de ciencias sociales, médicas y ambientales; debido a la versatilidad de las matemáticas y oportunidad de usar en soluciones a problemas puntuales de compleja solución. Se agrega un análisis sobre el teorema de números primos, análisis sobre sismos y análisis sobre marketing estratégico..

II. TEOREMAS

Teorema 1: algoritmo evolutivo

Si se tiene una función de cálculo de error relativo de [8]

$\frac{(\text{valor actual} - \text{valor anterior})}{\text{valor actual}}$, entonces con conceptos

algebraicos podemos llegar a la ecuación de algoritmo evolutivo $A_{\text{evol}} = (1 - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}})^{1/t}$, siendo t el tiempo de evaluación del experimento.

Demostración

Error relativo = $\frac{(\text{valor actual} - \text{valor anterior})}{\text{valor actual}}$

Paso algebraico

$$= (\frac{\text{valor actual}}{\text{valor actual}} - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}})$$

$$= (1 - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}})$$

Repito $1/t$ veces

$$\text{Evolutivo} = (1 - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}})^{1/t} \quad (1)$$

Extremos relativos

Se sabe qué valor actual $\geq$ valor anterior de [3]

Si valor anterior = 0 = $(1 - 0)^{\frac{1}{t}} = 1$, es una consecuencia del modelo.

Para cuando la evolución empieza con una gran diferencia entre valor anterior = 0 y valor actual = 1, entonces la evolución es alta tendiendo a probabilidad. Entonces la probabilidad se acerca a 1 cuando las variables del modelo tienen diferencias altas entre sus extremos relativos. Si valor anterior = valor actual = $(1 - 1)^{\frac{1}{t}} = 0$.

Si no se produjo una evolución al ser valor anterior parecido a valor actual, entonces la probabilidad de evolución tiende a 0

Si $t = 0$, el argumento $1/t$ se define desde la perspectiva de que el error se repite $1/t$ veces en productos sucesivos, debido a que solo de esta manera $1/t$ el modelo podrá ser evaluado de la forma correcta.

$$= (1 - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}})^{1/0} = (1 - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}})^{\infty} = 0$$

Al hacer potencia de una probabilidad elevada a un número significativamente grande la probabilidad tiende a 0. No se produjo evolución al tratarse al comienzo de los tiempos cuando todo era caos y no se tenían altos grados de evolución. $T \rightarrow \infty$

$$= (1 - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}})^{1/\infty} = (1 - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}})^0 = 1$$

$1/\infty$ es una abstracción axiomática de que la división en infinito tiende a 0.

El análisis que corresponde es que siendo el tiempo tendiendo a valores grandes o infinito es probable que la evolución sea grande o tendiendo a probabilidad de certeza igual a 1. Este concepto se prueba en la práctica como todos los demás.

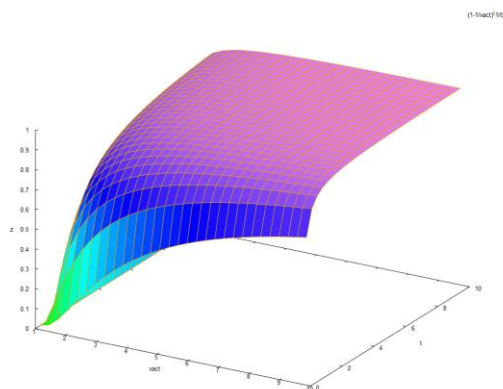


Fig. 1 Algoritmo evolutivo

Corolario 1

La variable valor actual > 0 , el modelo puede pasar del caos a la predicción algo que solo se puede hacer al convertirlo en un modelo de probabilidad. Este paso, genera una conversión del caos que es el error relativo en un modelo de probabilidad que tiene un carácter predictivo.

Corolario 2

La variable valor actual $\geq$ valor anterior.

Corolario 3

Como es derivada del error relativo, podemos concluir que algoritmo evolutivo sale del caos al modelo predictivo.

Corolario 4

Si el tiempo $t = 0$ o inicio de los tiempo la evolución es 0, si el tiempo $t \rightarrow \infty$, entonces se evolucionó en el tiempo.

Corolario 5

Si valor anterior = 0, entonces la evolución es alta o tiende a probabilidad 1 porque hay distancias entre valor anterior y valor actual. Ahora si valor actual es un número mucho más grande que valor anterior, entonces la probabilidad tiende a la certeza de evolución o 1.

$$0 \leq A_{evol} \leq 1$$

$$0 < \text{Valor actual} < \infty$$

$$0 \leq \text{Valor anterior} < \infty$$

$$0 \leq t < \infty$$

Teorema 2. Centros de gravedad en 2 dimensiones

Si el plano cartesiano consta de centros de gravedad o un punto unidos a una serie de puntos y calculados sus senos, entonces su función de probabilidad es: de [5]

$$Pg = 1 -$$

$$\frac{1}{e^{((\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_{n1})/n_1)^{\frac{1}{t^1}} + \dots + ((\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_{n4})/n_4)^{\frac{1}{t^4}})}$$

(2)

Que es el centro de gravedad sistémico. Ahora para todos los centros de gravedad

$$Pr = \frac{(Pg1 + Pg2 + \dots + PgK)}{k} \quad (3)$$

Demostración

Dada la probabilidad sistémica derivada de la ecuación madre de sistemas de [5]

Causas y consecuencias. *Ecuación madre de teoría de sistemas:*

Partimos de la hipótesis de que las partes y relaciones de la teoría de sistemas son las causas y el objetivo las consecuencias. Entonces en un primer planteo de la ecuación madre de sistemas empiezo con una deducción de la serie de Maclaurin de [4] un caso especial de la serie de Taylor. Sabemos las relaciones son de vital importancia en los sistemas en general.

Demostración:

Tomamos a C_i como parámetro para nuestro estudio. Como las relaciones entre seres humanos y entre partes en general de todo sistema son una derivación de otras relaciones o consecuencia de estas, podemos obtener una función primitiva de la antiderivadas de cada relación.

de [7]

$$\int C_i dx = C_i \cdot X + K; \text{ donde } K \text{ es constante que la consideramos igual a } 0.$$

$\int C_i X dx = C_i \cdot \frac{X^2}{2}$, en la integral indefinida la integral de una potencia se puede definir como $\frac{X^n}{n}$ donde el exponente se suma en 1 y el denominador es el mismo del exponente.

$$\int C_i \frac{X^2}{2} dx = C_i \cdot \frac{X^3}{2 \cdot 3}$$

$\int C_i \frac{X^3}{23} dx = C_i \cdot \frac{X^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$, en este caso el denominador es constante y no forma parte de la integración pero lo mismo, y siguiendo el proceso iterativo, la integral es sumar en 1 el exponente y colocar ese mismo valor como producto de las constantes.

$$\dots$$

$$\int C_i \frac{X^{n-1}}{23 \dots (n-1)} dx = C_i \cdot \frac{X^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}$$

Sumamos los resultados.

$$= C_i + C_i \cdot X + C_i \cdot \frac{X^2}{2} + C_i \cdot \frac{X^3}{2 \cdot 3} + C_i \cdot \frac{X^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + C_i \cdot \frac{X^n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} =$$

$$C_i + C_i \cdot X + C_i \cdot \frac{X^2}{2!} + C_i \cdot \frac{X^3}{3!} + \dots + C_i \cdot \frac{X^n}{n!} + \dots$$

Esto es una aproximación a serie de Maclaurin con

$$f(x) = e^{cx} \text{ De [4]}$$

$$f^j(0) = C_i e^{ci0} = C_i$$

$$f^{(j)}(x) = C_i e^{cix}, \text{ para toda derivada con } j=1, \dots, n$$

Por lo tanto $f(x) = e^{cx}$; es la ecuación madre de la teoría de sistemas. Con C_i como relación o causa y X como parte o causa.

Veamos otras demostraciones

$$\text{Sea } \frac{dy}{dx} = k \cdot y$$

Una ecuación de crecimiento exponencial en y , entonces su integral en ambos miembros es

$$Y = C e^{t \cdot k}$$

Consideramos: $C = 1$

Donde $t = c$:

$k = x$, entonces queda: $y = e^{c \cdot x}$ que es la ecuación de sistemas

Otra demostración

$P(x) = k_1 \cdot x_1^1 + k_2 \cdot x_2^2 + \dots + k_n \cdot x_n^n$ un polinomio de grado n

Su n derivada es

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k \cdot x_n \text{ Donde } x_n = y, \text{ entonces}$$

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y$$

Al tener $P(x)$ y $\frac{dy}{dx}$ igual derivada, concluimos que corresponden a la misma ecuación con lo que queda demostrado que todo polinomio de grado n se convierte en una exponencial. Una forma menos sutil, pero útil de demostración es hacer una escala de menor a mayor de los valores que arroja para termino dependiente el polinomio. Luego esos valores de menor a mayor se convierten en una exponencial.

Consideramos a las partes como igual a 1 y quedan las relaciones.

Calculamos la inversa del complemento

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^x}$$

X que son las relaciones se reduce al cálculo propuesto

Extremos relativos

$$Xi \rightarrow 90^\circ$$

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^{(((1+1+\dots+1)/n)^{\frac{1}{t1}} + \dots + ((1+1+\dots+1)/n)^{\frac{1}{t4}})}}$$

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^4} \rightarrow 1$$

Se toman 4 de a cuatro puntos como mínimo para los centros de gravedad. La probabilidad en estos casos es alta para valores altos del ángulo.

$$Xi \rightarrow 0^\circ$$

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^{(((0+0+\dots+0)/n)^{\frac{1}{t1}} + \dots + ((0+0+\dots+0)/n)^{\frac{1}{t4}})}}$$

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^0} = 1 - 1 = 0$$

Para valores pequeños del ángulo el centro de gravedad tiende a 0.

$$T = 0$$

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^{(((\sin x1 + \dots + \sin xn1)/n1)^{\frac{1}{0}} + \dots + ((\sin x1 + \dots + \sin xn4)/n4)^{\frac{1}{0}})}}$$

Al ser cociente 1/0 se tiende a un valor infinito por lo tanto una probabilidad de sin elevada a infinito veces su producto me genera 0 como valor final.

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^0} = 1 - 1 = 0$$

Al comienzo del análisis se pueden esperar probabilidades bajas. Esto es debido a que aún no hubo movimientos de puntos.

$$T \rightarrow \infty$$

$$Pg = 1 -$$

$$\frac{1}{e^{(((\sin x1 + \dots + \sin xn1)/n1)^{\frac{1}{\infty}} + \dots + ((\sin x1 + \dots + \sin xn4)/n4)^{\frac{1}{\infty}})}}$$

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^4} \rightarrow 1$$

Para un transcurso del tiempo y por la variable t la probabilidad es alta.

$$0 \leq Pg \leq 1$$

$$0 \leq t \rightarrow \infty$$

$$0^\circ \leq X \leq 90^\circ$$

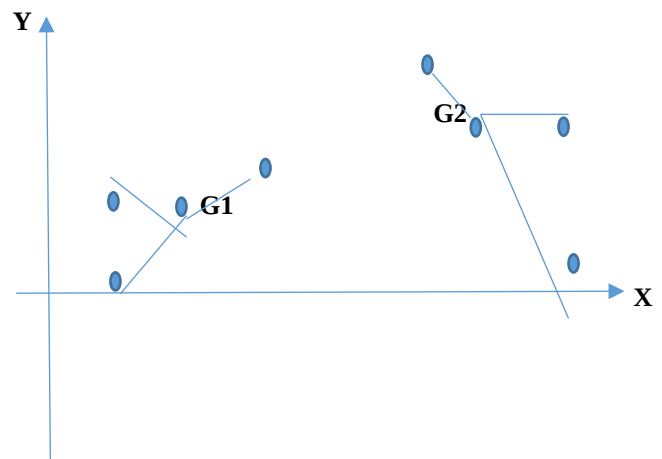


Fig. 2 Centros de gravedad en dos dimensiones

Teorema 3. Centros de gravedad en 3 dimensiones

Si obtenemos centros de gravedad en plano x,y entonces la función que corresponde al centro de gravedad en z es

$$Pg_z = ((\sin X1 \cdot Pg1 + \sin X2 \cdot Pg2 + \dots + \sin Xk \cdot Pgk) / k)^{1/t} \quad (4)$$

Demostración

De teorema 2 deducimos que se demuestra para Pg , Xi y t
 $0 \leq Pg_z \leq 1$

El producto de una probabilidad por otra probabilidad nos resulta una probabilidad entre 0 y 1.

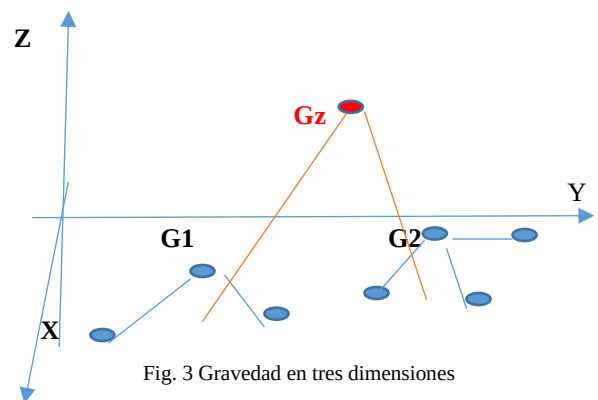


Fig. 3 Gravedad en tres dimensiones

Teorema 4. teoría de números primos

Si dos números primos excepto el dos se multiplican; entonces obtengo siempre un número no primo e impar.

Demostración

Lo primero se demuestra al ser este número el resultado del producto de dos números, ya deja de ser primo porque es

divisible en los dos números. Un número primo es impar al evitar ser divisible en 2 que son los números pares.

Por último veamos las tablas de producto de impares

Tabla I
Producto de números impares

1 . 1 = 1	3 . 1 = 3	5 . 1 = 5	7 . 1 = 7	9 . 1 = 9
1 . 3 = 3	3 . 3 = 9	5 . 3 = 15	7 . 3 = 21	9 . 3 = 27
1 . 5 = 5	3 . 5 = 15	5 . 5 = 25	7 . 5 = 35	9 . 5 = 45
1 . 7 = 7	3 . 7 = 21	5 . 7 = 35	7 . 7 = 49	9 . 7 = 63
1 . 9 = 9	3 . 9 = 27	5 . 9 = 45	7 . 9 = 63	9 . 9 = 81

Por lo tanto podemos ver que el producto de dos impares es un impar y al ser todos los primos impares se demuestra.

III. APLICACIONES Y RESULTADOS.

Algoritmo evolutivo

Educación: De [1] podemos inferir la evolución del sistema educativo en México a partir del aumento de la escolaridad

Tabla II
AUMENTO DE LA ESCOLARIDAD POR PERIODO

Periodo	Básica	Secundaria	Superior	Capacitación para trabajo
2000-2001	23565	2955	2047	1051
2015-2016	25897	4985	3648	1861

Para estos valores calculamos algoritmo evolutivo de escolaridad en nivel básica. De Ec. 1 vemos

$$\text{Evolutivo} = \left(1 - \frac{\text{valor anterior}}{\text{valor actual}}\right)^{1/t}$$

$$A_{\text{evol}} = \left(1 - \frac{23565}{25897}\right)^{1/14} = 0,84201$$

Esta probabilidad alta sugiere evolución en el sistema educativo al crecer la escolaridad. El valor t es la cantidad de años que pasaron entre cada periodo que es 14 años

$$A_{\text{evol}} = \left(1 - \frac{2955}{4985}\right)^{1/14} = 0,93784$$

También en este caso de nivel secundaria podemos inferir una alta evolución del sistema educativo

Créditos: Evolución cartera crediticia Argentina. De [2]

Tabla III
CRÉDITOS EN DOS PERIODOS

Periodo	Adelantos	Hipotecarios	Tarjetas
2000	8,5%	25,5%	6,1%
2022	7,5%	6,6%	26,5%

Se puede deducir que los valores cambian la escala temporal ya que en el periodo 2000 son mayores al periodo 2022. Esto se traduce en una involución del crédito en Argentina.

$$A_{\text{evol}} = \left(1 - \frac{7,5}{8,5}\right)^{\frac{1}{22}} = 0,90730$$

Esta probabilidad de involución en adelantos en cuenta corriente genera un retroceso en el crecimiento

Otro ejemplo

En [1] vemos que el tumor no microcitico pasa de 0,5 cm de ancho a 1 cm. De Ec. 1, con una probabilidad alta de 0,90

$$0,90 = \left(1 - \frac{0,5}{1}\right)^{1/t}$$

$$\ln 0,9 = \frac{1}{t} \cdot \ln 0,5$$

$$T = \frac{-0,69314}{-0,10536}$$

$$T = 7$$

Entonces en 7 unidades de tiempo y con una probabilidad alta de 0,90 el tumor crece de 0,5 cm a 1 cm de ancho

Centros de gravedad en dos dimensiones

Empezamos con una simulación en Excel para los puntos, centro de gravedad y los ángulos entre ambos.

Primer centro de gravedad

Media = 60° Desvío = 10°

X1=56,4299946°
X2=54,7515107°
X3=64,5862407°

Calculemos los senos y su potencia
 $((\sin 56^\circ + \sin 54^\circ + \sin 64^\circ)/3)^{1/3} = 0,94563$

Segundo centro de gravedad
 Media = 45° Desvío = 15°

X1=52,1443139°

X2=46,5778141°

X3=48,7715495°

Calculemos los senos y su potencia

$((\sin 52^\circ + \sin 46^\circ + \sin 48^\circ)/3)^{1/2} = 0,86612$

De Ec. 2

Consideramos a t como el tiempo de análisis.

$$= 1 - \frac{1}{e^{(0,94563+0,86612)}}$$

$$= 0,83663$$

La probabilidad es alta, por lo tanto podemos asegurar que bajo desvío de la simulación de la normal nos da altos niveles de probabilidad. Este ejemplo con sus medias y desvíos es para desarrollo urbano, donde podemos apreciar que la alta concentración de comercios y departamentos del estado; genera una alta probabilidad de centros de gravedad que será concentración y problemas de tránsito.

Ahora veamos, si consideramos las inundaciones que se dan en las ciudades, cada árbol absorbe de la lluvia 35 litros de agua. Veamos que concentración es necesaria para evitar las inundaciones en la ciudad.

Media = 35 Desvío = 5

X1=29,8969958°

X2=32,4051264°

X3=27,7133331°

Consideramos una probabilidad alta de 0,90

$$0,90 = 1 - \frac{1}{e^0}$$

$$1 - 0,90 = \frac{1}{e^0}$$

$$\ln(e^0) = \ln\left(\frac{1}{0,10}\right)$$

$$\ln(\sin 29^\circ + \sin 32^\circ + \sin 27^\circ)^{1/t} = \ln 2,30258$$

$$1/t \cdot (0,38439) = 0,83403$$

$$1/t = 2,16974$$

$$T = 0,46088 \cdot 12 \text{ meses} = 5 \text{ meses aproximadamente}$$

Entonces, podemos concluir que en poco tiempo (5 meses) se puede solucionar el problema de las inundaciones en la ciudad plantando árboles que consuman un promedio de 35 litros de agua y un desvío de 5 litros.

Otro ejemplo

Analizamos centros de distribución de alimentos en supermercados para saber si están muy lejos de los centros de consumo, algo muy importante en estrategias de marketing.

De Ec. 2, y a partir de la simulación en Excel con números pseudo aleatorios de la normal; obtenemos:

Media = 60° Desvío = 10°

X1=56,4299946°

X2=54,7515107°

X3=64,5862407°

Haciendo los cálculos correspondientes, y para un tiempo de 1 año obtenemos:

$$Pg = 1 - \frac{1}{e^{(((0,83311+0,81664+0,90318)/3)^{1/3})}}$$

$$Pg = 0,92214$$

Esta alta probabilidad sugiere que al haber una media de 60° y un desvío chico de 10°, entonces son simétricos los centros de consumo con los abastecedores de alimentos y no hay grandes distancias entre ellos; lo que lleva a una alta probabilidad de centros de gravedad para soluciones de marketing.

Centros de gravedad en Z

Consideremos dos centros de gravedad en (x,y), que serán las medidas de localización del delito respecto a posición de centros de consumo. De esta manera el centro de gravedad delincuente forma ángulos con los puntos de robo.

Media = 45° Desvío = 10°

X1=41,4299946°

X2=39,7515107°

X3=49,5862407°

Haciendo los cálculos necesarios la probabilidad de centro de gravedad y con un tiempo t=2 es:

$$Pg1 = 0,56160$$

Media = 35° Desvío = 15°

X1=42,1443139

X2=36,5778141

X3=38,7715495

Haciendo los cálculos necesarios la probabilidad de centro de gravedad y tiempo $t = 2$ es:

$$Pg2 = 0,54618$$

Ahora en Z centro de gravedad podemos inferir la distancia en ángulos de la policía con los dos centros de gravedad de delito en (x,y)

Simulación en Excel como venimos haciendo

$$\text{Media} = 30^\circ \quad \text{Desvío} = 10^\circ$$

$$X1=34,7611593^\circ$$

$$X2=23,4376547^\circ$$

De Ec. 4 deducimos, y con un tiempo de $t=2$

$$Pg_z = ((\sin 34^\circ \cdot Pg1 + \sin 23^\circ \cdot Pg2)/2)^{1/2}$$

$$Pg_z = ((\sin 34^\circ \cdot 0,56160 + \sin 23^\circ \cdot 0,54618)/2)^{1/2}$$

$$Pg_z = 0,51354$$

Lo que relativamente es una probabilidad baja de seguridad en la zona por la lejanía en Z de los policías de los centros de gravedad del delito.

Otro ejemplo

De Ec. 4, hacemos los cálculos a partir de una simulación de Excel. Aplicación en sismos

$$\text{Media} = 70^\circ \quad \text{y desvío} = 15^\circ$$

$$X1=64,6449918$$

$$X2=62,1272661$$

Las probabilidades para los centros de gravedad en 2 dimensiones

$$P1 = 0,56$$

$$P2 = 0,71, \text{ usamos para } P1 \text{ y } P2 \text{ subíndices.}$$

Tiempo a considerar es la incógnita. Tomamos una probabilidad final media de 0,65.

$$0,65 = ((\sin 64,64^\circ \cdot 0,56 + \sin 62,12^\circ \cdot 0,71)/2)^{1/t}$$

$$T = \frac{\ln 0,56681}{\ln 0,65} = 1,31790$$

El análisis que se hace es que el tiempo es corto entre un suceso de sismo y otro suceso si se dan las siguientes consideraciones

1 – El epicentro se acerca a los 90° con relación al lugar donde ocurre el sismo y con un desvío alto

2 – Un desvío alto que aumenta el área de ocurrencia del sismo

3 – Los centros de gravedad en 2 dimensiones nos acercan al análisis de que probabilidades pequeñas sugieren que los sismos suceden en lugares cercanos. Como es en la practica

4 – La probabilidad media de 0,65 nos condiciona en el tiempo y es precisamente este tiempo de 1,31790 unidades de tiempo un indicador de sucesos de sismos muy cercanos entre si.

Otro ejemplo

En sismos tomemos un tiempo de sucesos alto de 3 unidades de tiempo y probabilidades de sucesos en 2 dimensiones altas seguidas de una probabilidad final alta; después consideramos como incógnita a los senos de 3 dimensiones.

$$X1 = 0,85$$

$$X2 = 0,8$$

$$T = 4 \text{ unidades de tiempo}$$

$$Pg_z = 0,87$$

$$G1 = 70^\circ$$

$$0,87 = ((\sin 70^\circ \cdot 0,85 + \sin G2 \cdot 0,8)/2)^{1/4}$$

Calculando los Ln

$$0,34705 = \sin G2$$

$$G2 = \text{ArcSin } 0,34705 = 20,30698^\circ$$

La relación entre el ángulo de 70° para $G1$ y el calculado de $20,30698^\circ$ para $G2$ nos indica que a altas probabilidades el epicentro en gravedad en tres dimensiones abarca grandes extensiones de suelo que sucede los sismos

IV. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Las matemáticas que se presentan como modelos originales de ciencia básica, tienen como objeto ayudar a la comprensión y desarrollo de soluciones a problemas actuales y de muy difícil abordaje. Se describió mediante inteligencia artificial un nuevo modelo de algoritmo evolutivo deducido del error relativo, y centros de gravedad en dos dimensiones y centros de gravedad en tres dimensiones mediante función seno.

Se aplico a la educación en la evolución de los métodos pedagógicos y planes de estudio.

Se realizó en economía n análisis de la interacción entre la recesión y la evolución de la economía en el sistema crediticio.

Se estimó la predicción de lugares donde acontecerá con mayor probabilidad un delito.

Se aplicó el algoritmo a revisar cantidad de vehículos y tránsito para maximizar la utilidad.

Se propuso un nuevo teorema en primos.

Mediante el algoritmo de la misma forma se realizó un análisis de sismos.

V. AGRADECIMIENTOS

A mi familia y amigos, Marcos Fajardo de JOOM, al equipo de JOOM, a los árbitros, Rodolfo Calderón, Luis Sacaba, Ing. Gustavo Carrasco, Dr. Ing. Jorge Perera, Ing. Ricardo Adra, Cdr. Rodríguez, Cdr. Arturo López, AUS Damián García Pascualini, AUS Adrián Murua. Muchas gracias.

REFERENCIAS

- [1] Educación en México
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982017000200003 Accedido 6 de mayo 2023
- [2] Evolución de préstamos y depósitos sistema bancario
<https://diariolaopinion.com.ar/contenido/366442/evolucion-de-los-prestamos-y-depositos-del-sistema-bancario> Accedido el 7 de mayo 2023
- [3] Walpole, Myers, Myers, Ye;. Probabilidad y estadísticas para ingeniería y ciencias. Editorial Octava edición. (1978). Pearson Prentice Hall.
- [4] Leithold; El cálculo con geometría analítica. .(1994). Editorial Eccga
- [5] Douglas C. Montgomery, George C. Runger. Probabilidad y Estadística aplicada a la ingeniería . (2012). Editorial Limusa.
- [6] Ron Larson.. Cálculo tomo 1. (2016). Editorial Cengage Learning
- [7] T. M. Apostol. Calculus: cálculo con funciones de una variable con una introducción al Algebra Lineal Vol. 1. (1972) Editorial Reverte.
- [8] N.V. Smirnov, "Approximate distribution laws for random variables, constructed from empirical data" Uspekhi Mat. Nauk , 10 (1944) pp. 179–206.

Modelando la dinámica del tipo de cambio USD/MXN mediante la aplicación de procesos estocásticos.

Pichardo Jimenez Raziel.

Maestría en Finanzas Bursátiles, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad Universitaria, Ciudad de México.

razielpichardo@gmail.com

Resumen- El presente artículo tiene como objetivo mostrar la aplicación de los procesos estocásticos dentro del ámbito financiero, dicha formalización ha contribuido a la mitigación del riesgo. Justificándose en que los inversores toman sus decisiones en los mercados, y suelen tener en cuenta aspectos: como los objetivos de inversión, la rentabilidad deseada en el periodo, la exposición al riesgo y la preocupación por la liquidez. Por lo que, sólo identificando las amenazas y evaluando todos los escenarios posibles se pueden prevenir las pérdidas en situaciones inesperadas. A manera de conclusión se simulan los precios futuros del tipo de cambio USD/MXN para el año 2023, con la finalidad de hacer una comparación con los datos reales. Para lo cual se aplica el método Monte Carlo, haciendo uso del Movimiento Browniano Geométrico (GBM), debido a que puede proporcionar una buena aproximación del comportamiento del precio de un activo financiero en un futuro cercano.

Palabras Clave- Expectativas, Métodos de simulación, Procesos estocásticos, Riesgo e incertidumbre.

Abstract. The purpose of this article is to show the application of stochastic processes within the financial field, such formalization has contributed to risk mitigation. It is justified by the fact that investors make their decisions in the markets, and usually take into account aspects such as investment objectives, desired profitability in the period, risk exposure and liquidity concerns. Therefore, only by identifying threats and evaluating all possible scenarios can losses in unexpected situations be prevented. In conclusion, the future prices of the USD/MXN exchange rate for the year 2023 are simulated in order to make a comparison with real data. For which the Monte Carlo method is applied, making use of the Geometric Brownian Motion (GBM), because it can provide a good approximation of the behavior of the price of a financial asset in the near future.

Keywords. Expectations, Risk and uncertainty, Simulation methods, Stochastic processes.

Mathematical Subject Classification: 65C05.

I. INTRODUCCIÓN

Al estudiar algunos modelos dentro de la economía y las finanzas, se asume que algunas variables tienen un comportamiento lineal, incluso existen supuestos irreales que son constantemente debatidos; como la información perfecta y la eficiencia del mercado, donde todos los inversores tienen expectativas idénticas sobre las perspectivas futuras. Sin embargo, en la realidad, se observa un alto grado de volatilidad, lo que indica que estos supuestos son insuficientes para explicar el comportamiento de las variables. Debido a que la información disponible no es perfecta ni completamente confiable, las variables económicas y financieras cambian

continuamente, lo que implica que sus comportamientos no son constantes. Por lo tanto, se necesitan desarrollar metodologías para explicar y pronosticar el comportamiento de las variables y reducir el riesgo. Una de estas metodologías es la modelación de procesos estocásticos.

Para [1], son los teóricos ortodoxos quienes adaptan y formalizan la toma de decisiones como una opción de maximizar una función de beneficios, aplicando un modelo de elección puramente lógico, donde adaptan los aspectos de la matemática para explicar el comportamiento de la sociedad, del individuo. Por lo que el “mundo económico” puede ser entendido por modelos construidos con la formalización de relaciones económicas, que, son una abstracción, lo que permite la simplificación e interpretación de las principales variables.

La utilización de las técnicas matemáticas de optimización clásica permitió, dentro del análisis económico, encontrar los valores de las variables de interés, que una vez alcanzadas, tendían a continuar por sí solas, dando por hecho la posibilidad de alcanzar la posición de equilibrio, aun cuando ocurra un cambio en un parámetro del modelo seleccionado, pues se tendrá un desplazamiento de la posición de equilibrio inicial a la posición de equilibrio final.

Sin embargo, la aplicación de este tipo de modelos matemáticos no logra explicar totalmente ciertos fenómenos económicos de tipo productivos como el empleo, la inversión, los precios y el producto (no explican el comportamiento real de la variable). Por lo que es complejo determinar con exactitud la volatilidad de los precios, las tasas de interés. Ejemplo de ello, se hace referencia a la Gran Depresión de 1929, donde fue muy complejo determinar las razones que impulsaron dicha crisis.

Aunque [2], determina que son entre los años sesenta y ochenta cuando se pone en evidencia la incapacidad de la macroeconomía tradicional, siendo incapaz de anticipar shocks inesperados, siendo necesario aplicar técnicas dinámicas estocásticas. Además del creciente interés por el estudio de la incertidumbre para analizar el mercado financiero en la toma de decisiones.

II. FORMALIZACIÓN DE EXPECTATIVAS Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

La importancia del estudio y utilización de procesos estocásticos en el campo de las finanzas resulta una herramienta poderosa en la solución de problemas financieros, de seguros y en toda aquella situación que se presente un cierto grado de incertidumbre en función del tiempo.

Siguiendo a [3] y [4], un proceso estocástico se puede definir como, $X = \{X_t\}_{t \in T}$ la cual es una colección de variables aleatorias (definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) que toma valores en un conjunto S con parámetro T , es decir, para cada $t \in T$, X_t es una variable aleatoria. Por lo tanto, un proceso estocástico puede ser interpretado como la evolución en el tiempo de algún fenómeno cuyo comportamiento se rige por el azar.

La aplicación de estos procesos se remonta a la década de 1960, cuando el matemático francés Benoît Mandelbrot desarrolló la teoría de los fractales para el estudio de la dinámica de los precios de los activos financieros. Posteriormente, en la década de 1970, Robert Merton y otros investigadores utilizaron procesos estocásticos para desarrollar modelos de valoración de opciones financieras, lo que sentó las bases de la teoría moderna de la valoración de activos. De esta manera, en los mercados financieros, los procesos estocásticos se utilizan para modelar la dinámica de los precios de los activos financieros, la volatilidad y el riesgo, lo que permite a los inversores comprender y predecir el comportamiento de los mercados.

Pero además dentro del ámbito de la teoría se supone que las decisiones de los agentes dependen no solo de los sucesos que han pasado, sino también de las expectativas que se tienen sobre el futuro. Esta idea de conocer el futuro tiende a dar cierta confianza al reducir la incertidumbre sobre situaciones con alta volatilidad, y esto se debe a la creencia de que ocurra lo esperado, si bien, las expectativas ayudan con el proceso de tomar una mejor decisión, en ningún momento eliminan el riesgo de la decisión.

[5] Clasifica a las expectativas según la posición temporal, es decir; en pasado, en el presente y en el futuro, aunque solo se menciona las comúnmente conocidas en el ámbito económico-financiero: estáticas, extrapolativas, y adaptativas.

a) *Estáticas*: El pensamiento que se tiene es que las condiciones prevalecen con el paso del tiempo. Por ejemplo, para determinar el nivel de precios esperado, la expectativa estática del mismo se puede expresar de la siguiente forma:

$$P_t^e = P_{t-1} \quad (1)$$

Siendo fuertemente criticadas por considerarse reduccionistas y simplistas (situación de equilibrio).

b) *Extrapolativas*: Estas son propuestas por [6]. La fórmula que identifica este tipo de expectativas para dos periodos atrás se puede expresar de la siguiente forma:

$$P_t^e = P_{t-1} + \alpha (P_{t-1} + P_{t-2}) \quad (2)$$

Entonces según el método extrapolativo supone que el precio esperado en el periodo t puede ser directamente identificado con algún valor efectivo y el pasado del mismo. Es decir, que este tipo de expectativas describen cómo los individuos toman decisiones en un período determinado, haciendo uso de información pasada de manera sucesiva, en cada período, [7] afirma que este tipo de extrapolación ha sido considerado poco satisfactoria ya que el precio está determinado solamente por precios pasados, haciendo caso omiso de la información que pueda estar contenida en otros factores.

c) *Adaptativas*: Propuestas por [8], y utilizadas por [9], en ellas se establece que los agentes económicos elaboran sus previsiones sobre el futuro extrapolando la información del pasado y el presente.

$$P_t^e = \alpha P_{t-1} + (1 - \alpha) P_{t-1}^e \quad (3)$$

Es decir, que el precio esperado en el periodo t es revisado periódicamente en función del porcentaje de error entre lo esperado en el último periodo y lo que efectivamente ocurrió. En otras palabras; los individuos toman en cuenta su pasado, así como sus errores y van adaptándose a sus nuevas decisiones.

Por último, existen las expectativas *Racionales* [10], las cuales, parten de la hipótesis que los agentes económicos no desperdician información, y que se utiliza de forma eficiente toda la información sobre el estado pasado y presente de la economía. Por lo que, las expectativas racionales, suponen que los agentes constantemente y, por regla general, utilizan toda la información disponible para hacer pronósticos del comportamiento futuro de la economía y a partir de ello definen su comportamiento cotidiano. Aunque, es interesante, es cuestionado, porque pensar que los individuos no desperdician información o que tienen acceso a toda ella, es volver a suscribirse a los neoclásicos con supuestos de información perfecta.

Es claro, que la utilización de los procesos estocásticos es una formalización de las expectativas. Por ejemplo, los procesos de Markov se caracteriza a través de sus funciones condicionadas a la información pasada. De tal manera, se podría debatir su utilidad en la implementación del mercado. Debido a que un proceso estocástico que modele el precio de una acción en el mercado es común que dependa de los precios anteriores de la acción. El precio de una acción en un momento dado puede verse influenciado por los precios de días o semanas anteriores, lo que implica que la información pasada es relevante para predecir el comportamiento futuro del proceso. A continuación, se describe una forma general de representación de un proceso estocástico dependiente del pasado utilizando la notación de función aleatoria:

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2} + \dots + X_{t-p}), t \in T \quad (4)$$

Donde X_t , es el valor aleatorio del proceso estocástico en el tiempo t , f es una función que representa la evolución del proceso estocástico en el tiempo t , y que puede depender de los valores anteriores del proceso.

La presencia de dependencia del pasado en un proceso estocástico puede tener implicaciones importantes en su modelado y análisis, ya que puede afectar a la predicción, la estimación de parámetros y la interpretación de los resultados. Por lo tanto, es importante tener en cuenta la posible dependencia del pasado al construir y analizar procesos estocásticos.

[11], [12] construyen un proceso de manera aditiva, considerando que el precio de una acción se comporta de la siguiente forma:

$$Y_t = Y_{t-1} + X_t \quad (5)$$

Donde X_t es la perturbación estocástica que, asume una caminata aleatoria con distribución normal $X_t \sim N(0, \sigma^2 t)$. Esta afirmación parte del teorema central del límite [13]. Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión infinita de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media μ y varianza σ^2 ambas finitas. Entonces la variable aleatoria:

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \quad (6)$$

Converge en distribución a una variable normal estándar. Es decir, la función de distribución de la variable aleatoria Z_n tiende a la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar cuando $n \rightarrow \infty$. Aunque, el proceso estocástico presentado en la ec. (5), puede generar valores negativos, lo que conducen a mayores limitaciones, una solución es la aplicación del Movimiento Browniano, también conocido como proceso de Wiener, que de acuerdo con [4] y [14], lo definen como un proceso estocástico $\{W_t; t \geq 0\}$ con valores en $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $W_0 = 0$ c. s.
2. Las trayectorias $t \rightarrow W_t$ son continuas
3. Se tienen incrementos independientes, es decir,
Para $0 \leq s < t < u < v \leq T$, los incrementos $W_t - W_s$ y $W_v - W_u$ son independientes
4. La distribución de los incrementos es:
 $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t-s)), \forall t > s \geq 0$

Además, una extensión de este proceso es el Movimiento Browniano Geométrico (Geometric Brownian Motion en inglés), en específico, es un tipo de proceso estocástico que se utiliza en la modelización de los precios de algunos activos financieros, como acciones o divisas. Este proceso se puede definir matemáticamente de la siguiente manera:

Sean μ y $\sigma > 0$ dos constantes, y $x_0 > 0$. El GBM es el proceso $\{X_t; t \geq 0\}$ solución de la ecuación estocástica:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \\ X_t &= x_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Donde se puede interpretar a dX_t como el cambio en el precio del activo X_t en el tiempo t , μ es la tasa de crecimiento o tendencia esperada del precio del activo, σ es la volatilidad del precio del activo, dW_t es un incremento del proceso de Wiener o movimiento browniano estándar en el tiempo t .

En la ec. (7), la primera parte $\mu X_t dt$ representa el componente determinista del proceso, haciendo que el proceso se mueva en una dirección esperada en el tiempo t . La segunda parte $\sigma X_t dW_t$ representa el componente estocástico del proceso, este término introduce la variabilidad aleatoria en el proceso debido al Movimiento Browniano, lo cual refleja la volatilidad de una inversión con riesgo y sujeta a las fluctuaciones de los mercados financieros.

Al proceso estocástico $\{X_t; t \geq 0\}$ se le llama proceso de Ito y satisface la EDE de la ec. (7). La cual para solucionarla, se puede obtener heurísticamente utilizando una aproximación mediante la expansión de la serie de Taylor de la función hasta sus segundas derivadas y conservando los términos de primer orden en el incremento de tiempo y de segundo orden en el incremento del Movimiento Browniano. Es decir, debe aplicarse el lema de Ito.

De la ec. (7), se puede obtener:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (8)$$

En donde $\frac{dX_t}{X_t}$ representa el rendimiento del activo en un periodo infinitesimal de tiempo. Aplicando el lema de Ito a la función $\ln X_t$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0; \frac{\partial f}{\partial X_t} = \frac{1}{X_t}; \frac{\partial^2 f}{\partial^2 X_t} = -\frac{1}{X_t^2}$$

Ahora, se utiliza el lema de Ito para obtener el diferencial de $f(X_t)$:

$$df(X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 X_t} \right) (dX_t)^2$$

Se reemplazan los valores de las derivadas parciales y dX_t de la ecuación diferencial original:

$$\begin{aligned} df(X_t) &= 0 dt + \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X_t^2} \right) (\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t)^2 \\ df(X_t) &= \mu dt + \sigma dW_t \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \right) (\mu^2 dt^2 + 2\mu\sigma dt dW_t + \sigma^2 dW_t^2) \end{aligned}$$

Luego, al considerar una aproximación de segundo orden, ignoramos los términos de orden superior a dt y dW_t^2 .

$$df(X_t) \approx \mu dt + \sigma dW_t - \left(\frac{1}{2}\right)(0 + 0 + \sigma^2 dt)$$

$$df(X_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$

Ahora se integran ambos lados de la ecuación para encontrar la ec. (9):

$$\int df(X_t) = \int \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \int \sigma dW_t$$

La integral estocástica $\int \sigma dW_t$ se define en términos de sumas de Riemann estocásticas o límites en el sentido de la convergencia en probabilidad. En esta integral se están acumulando los cambios aleatorios generados por el proceso de Wiener en un intervalo de tiempo $[0, t]$. Por lo tanto, se puede considerar que $\int \sigma dW_t = \sigma W_t$.

$$\ln X_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t + C$$

$$X_t = e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t + C} \quad (9)$$

Donde C es una constante de integración. Dado que $X_t = x_0$, se puede encontrar el valor de C, y obtener:

$$X_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t} \quad (10)$$

Siendo x_0 , el valor inicial del proceso en el tiempo $t = 0$, de tal manera, el valor a estimar es resultado del valor anterior sometido a una perturbación estocástica asociado a la media y la volatilidad.

III. SIMULACIÓN DEL TIPO DE CAMBIO USD/MXN

El análisis del tipo de cambio es importante porque es una variable macroeconómica fundamental que afecta a diferentes aspectos de la economía de un país, como el comercio internacional, la inversión extranjera, el turismo, incluso la inflación. Por lo tanto, es relevante entender y predecir el comportamiento del tipo de cambio para tomar decisiones informadas en diferentes áreas de la economía.

Para el caso de México el tipo de cambio USD/MXN ha experimentado varias fluctuaciones y eventos significativos, desde su cambio de régimen a libre flotación, que llevan a la paridad a tener periodos de depreciación: como pueden ser a causa de las crisis financieras, incertidumbre en la política, la caída en los precios del petróleo, la volatilidad en los mercados internacionales, etc., aunque, a partir de abril de 2020 a presentado una fuerte apreciación, esto se puede observar en la siguiente gráfica.



Figura 1: Comportamiento del tipo de Cambio. Fuente: Elaboración propia

La figura. 1. Muestra el precio de cierre diario del tipo de cambio USD/MXN del 01/01/2014 al 23/06/2023, obtenidos de Yahoo Finance, observando una alta volatilidad la cual se ve reflejada en los rendimientos diarios, así como al evaluar los estadísticos descriptivos. Presentando un coeficiente de variación de 13.20%, con mínimos de 12.8372 USD/MXN y máximos de 25.3362 USD/MXN.

Tabla I: Estadísticos descriptivos del tipo de cambio USD/MXN.
Fuente: Elaboración propia

Cantidad de datos	2472
Media	18.550224
Desviación estándar	2.449232
Mínimo	12.837200
25%	17.755813
50%	19.037075
75%	20.039830
Máximo	25.336201

En este trabajo se buscó modelar un periodo corto, para que el proceso basado en la media y la volatilidad histórica del tipo de cambio pueda proyectar de manera eficiente los valores futuros. Además, se debe tener en cuenta que el comportamiento del tipo de cambio USD/MXN es influenciado por una amplia variedad de factores y puede ser volátil y sujeto a cambios significativos en el corto plazo.

Dicho lo anterior, este apartado tiene como objetivo simular el tipo de cambio bajo un GBM haciendo uso del método Monte Carlo, para lo cual se utilizarán los datos históricos del tipo de cambio USD/MXN, del 01/01/2022 al 01/01/2023. Tomando así un año bursátil de referencial.



Figura 2: Comportamiento del tipo de Cambio. Fuente: Elaboración propia.

En este periodo analizado y propuesto mantiene un coeficiente de variación del 2.03% con un precio mínimo de 19.12 USD/MXN, y un máximo en 21.36 USD/MXN, proyectando un periodo estable.

Tabla II: Estadísticos descriptivos del tipo de cambio USD/MXN. Fuente: Elaboración propia

Cantidad de datos	260
Media	20.106256
Desviación estándar	0.408369
Mínimo	19.128300
25%	19.848890
50%	20.091255
75%	20.397600
Máximo	21.362391

De esta manera, se utiliza el lenguaje de *Python*, para calcular los retornos diarios y la volatilidad a partir de los datos descargados. Para así, generar un array de series de precios simulados utilizando un bucle anidado (creando 10 entradas). En cada iteración del bucle, se utiliza la fórmula del Movimiento Geométrico Browniano para calcular el precio simulado en el siguiente día, multiplicando el precio simulado del día anterior por un factor que se obtiene de una distribución normal con media igual a la tasa de drift (μ) y desviación estándar igual a la volatilidad (σ). (Ver el Algoritmo 1)

Finalmente, se grafican las simulaciones de precios en un gráfico para 260 días.

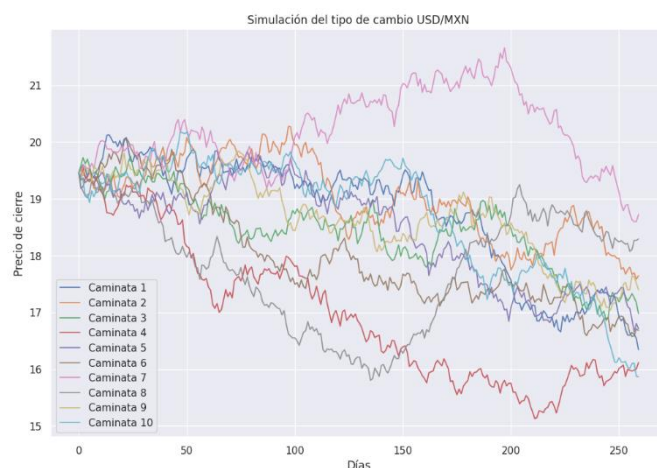


Figura 3: Simulación del Tipo de Cambio. Fuente: Elaboración propia

La *figura. 3*. Muestra los resultados de la simulación estocástica para los valores del tipo de cambio durante un año bursátil, en donde se observan distintos escenarios posibles sobre su comportamiento para el año 2023, las cuales se encuentran distinguidas por color y una etiqueta. Se puede notar una dispersión entra las caminatas entre mayor sea el número de días simulados. Es importante tener en cuenta que la simulación de precios puede variar según los parámetros utilizados, como la tasa de drift, la volatilidad, el período de tiempo y el número de simulaciones. Por lo tanto, es necesario tener precaución al interpretar los resultados de la simulación y considerar otros factores relevantes en la modelación de precios en un contexto real. Por último, se debe mencionar que, el modelado predictivo es uno de los métodos matemáticos más conocidos en distintas áreas como las ciencias sociales, la ingeniería y las finanzas, entre muchas. Una de las aplicaciones es la predicción del precio de las acciones. Aunque la volatilidad de los mercados financieros hace que la previsión, sea una tarea difícil. Con demasiada frecuencia se hacen previsiones, pero apenas se revisan para ver hasta qué punto fueron acertadas. Por esta razón, se decidió comparar las simulaciones con los datos reales del tipo de cambio, por lo que se necesitan los datos del tipo de cambio desde el primer día de enero hasta la fecha actual; es decir del 01/01/2023 al 23/06/2023, (ver el Algoritmo 2). Teniendo 124 datos reales del tipo de cambio; como se muestra en la gráfica de la figura 4, donde los resultados de las predicciones son correctos debido a que logran capturar los datos reales, siguiendo incluso las caminatas 4, 6, y 8.

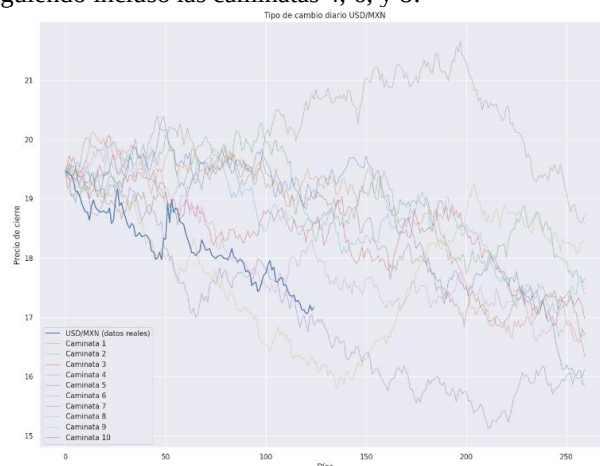


Figura 4: Simulación del tipo de cambio vs tipo de cambio real. Fuente: Elaboración propia

Si bien, el GBM tienen la capacidad de simular los precios de una acción, en este caso el tipo de cambio. Se debe tener en cuenta que tiene algunas dificultades el método.

Algoritmo 1. Se utiliza la técnica de caminata aleatoria para simular el comportamiento del tipo de cambio en el futuro, y se ajusta la desviación estándar según los datos históricos para reflejar la volatilidad. La simulación se realiza en Python utilizando la biblioteca Pandas y otras bibliotecas de análisis de datos.

```
# Descargar datos históricos del tipo de
cambio MXN/USD
ticker = "MXN=X"
start = datetime.datetime(2022, 1, 1)
end = datetime.datetime(2023, 1, 1)
df = yf.download(ticker, start=start,
end=end)

# Calcular los retornos diarios y la
volatilidad
df["daily_returns"] =
df["Close"].pct_change()
mu = df["daily_returns"].mean()
sigma = df["daily_returns"].std()

# Definir el número de días para la
simulación y el número de simulaciones
days = 252
simulations = 10

# Generar un array de 10 series de precios
simulados para 1 año
simulated_price_series =
np.zeros((simulations, days))
simulated_price_series[:, 0] =
df["Close"].iloc[-1]

for i in range(simulations):
    for j in range(1, days):
        simulated_price_series[i][j] =
simulated_price_series[i][j - 1] * (1 +
np.random.normal(mu, sigma))

# Graficar las simulaciones
plt.figure(figsize=(10, 6))
for i in range(simulations):
    plt.plot(simulated_price_series[i],
lw=1.3, alpha=0.9, label=f"Caminata {i+1}")

plt.title("Simulación de precios del tipo de
cambio USD/MXN")
plt.xlabel("Días")
plt.ylabel("Precio de cierre")
plt.show()
```

Algoritmo 2. Para comparar la simulación con los datos reales del tipo de cambio, primero necesitamos obtenerlos desde el primer día de enero hasta la fecha actual. Podemos obtener estos datos utilizando la biblioteca *yfinance* de Python.

```
start_date = '2023-01-01'
end_date = datetime.datetime.now()
tickers = ['MXN=X']
tipo = yf.download(tickers, start=start_date,
end=end_date, interval='1d')['Close']
tipo = pd.DataFrame(tipo)
```

```
# resetear el índice del DataFrame y eliminar
la columna 'Date'
tipo = tipo.reset_index().drop('Date',
axis=1)

# Graficar las simulaciones y el precio
actual
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(tipo, label="USD/MXN (datos
reales)")

for i in range(simulations):
    plt.plot(simulated_price_series[i], lw=1,
alpha=0.5, label=f"Caminata {i+1}")

plt.title("Tipo de cambio USD/MXN")
plt.xlabel("Días")
plt.ylabel("Precio de cierre")
plt.legend()
plt.show()
```

IV. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Al momento de realizar este tipo de simulaciones con proyecciones a un año, se puede notar que entre más lejano es el periodo futuro considerado, menos se sabe sobre él; tal como lo dice [15]. Por otro lado, este tipo de procesos consideran una media y volatilidad constante para la simulación, aunque podría presentarse como un inconveniente, debido al cambio en los precios, incluso al presentarse un evento inesperado, dichas predicciones quedarían fuera del comportamiento de los datos.

Por último, debe mencionarse que, si bien es cierto, este método logró capturar el comportamiento del tipo de cambio para lo que va del año en curso. Esto mismo somete a la serie a una hipótesis de distribución, lo que podría llevar a resultados inexactos, debido a una mala distribución. Además, puede ser difícil encontrar una distribución adecuada para algunos tipos de activos financieros, como los derivados complejos. Una posible solución a este inconveniente es la aplicación del modelado de redes neuronales (RNA), ya que este enfoque es capaz de aprender patrones en los datos sin la necesidad de hacer suposiciones explícitas.

REFERENCIAS

- [1] Gómez, N. G.: ¿El consenso sobre la racionalidad económica? *Estudios Gerenciales*, Universidad ICESI, 49-60. (2000). México.
- [2] Hernández, J.: Usos y limitaciones de la dinámica estocástica en el análisis macroeconómico convencional. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, Departamento de Economía. (2012). México, D.F.
- [3] Uribe, G. B.: Procesos Estocásticos I, Capacitación técnica especializada en el nuevo marco de Solvencia. Instituto de Matemáticas Universidad Nacional Autónoma de México. (2016). México.
- [4] Rincón, L.: Introducción a los procesos estocásticos. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM. (2012). México.
- [5] Hornero, D. C.: Expectativas financieras y la decisión de inversión. Dpto. Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Avda. Diagonal 690, 08034 Universidad de Barcelona. (2004). Barcelona
- [6] Goodwin, Richard M.. "Dynamical Coupling with Especial Reference to Markets Having Productions Lags", *Econometrica*, 15(3), pp. 181-204. (1947). USA.

- [7] Marco, L. E. Expectativas de precios. *Económica*, Año XV, No. 3, 275-281. (1969).México.
- [8] Cagan, Phillip. "The Monetary Dynamics of Hyper-inflation", en Milton Friedman (ed.), *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: University of Chicago Press(1956).USA.
- [9] Nerlove, Marc. *The Dynamics of Supply: Estimation of the Farmers' Response to Price*. Baltimore: John Hopkins University Press. (1958). USA.
- [10] Muth, J. Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica*. (1961). USA.
- [11] Cruz, A., Zapata, C., & Medina, D. Comportamiento del precio de las acciones en Colombia un enfoque de la caminata aleatoria. *Scientia et Technica* Año XVI, No 44, 84-89. (2010). Colombia.
- [12] Velásquez-Gaviria, D. Introducción al Movimiento Browniano para Finanzas en R. Departamento de Finanzas, Instituto Tecnológico Metropolitano. (2019). Colombia.
- [13] Iacus, Stefano M. *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*. Springer.(2008).USA.
- [14] Sidney I. Resnick. *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhäuser. (1992). Boston, MA.
- [15] Ros, Jaime. La Teoría General de Keynes y la macroeconomía moderna. *Investigacion económica*, Vol. LXXI, 279, enero-marzo, 19-37. (2012). México.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*